MATEMÁTICAS 2

María Trigueros Gaisman ▪ Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres ▪
María Dolores Lozano Suárez ▪ Mercedes Cortés Lascurain
Emanuel Jinich Charney ▪ Mónica Inés Schulmaister

FORTALEZA ACADÉMICA

SANTILLANA Secundaria

MATEMÁTICAS

2

Este libro fue elaborado en Editorial Santillana por el equipo de la Dirección General de Contenidos.

Ilustración
Lilia Tavares Valle
José Enrique Márquez Flores

Fotografía
Shutterstock
Gettyimages

Fotografía de portada
Shutterstock

ISBN:
Primera edición:

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 802

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Presentación

Querido alumno:

Bienvenido a tu **segundo curso de Matemáticas** de secundaria.

El libro **Matemáticas 2** lo hicimos pensando en ti, para que te acompañe en esta nueva etapa. En él encontrarás problemas y situaciones para que construyas ideas y conceptos matemáticos que te ayudarán a **comunicar** tus argumentos, a **justificar** tus procedimientos y a **comprender** las nuevas técnicas con las que te irás familiarizando a lo largo del curso. Decidimos enriquecer este libro con gran diversidad de contextos pensando en que tu proceso de aprendizaje no solo sea completo y lleno de significado, sino también interesante y entretenido.

Cuando estudias matemáticas pones en juego todo lo que has aprendido. Por ello, cada vez que te encuentres ante un nuevo reto, decide cuáles conceptos y procedimientos pueden serte útiles y cuáles debes descartar. Algunas decisiones pueden llevarte a no hallar la solución, así que prueba con otras estrategias e inténtalo las veces que sea necesario. Imaginar otras formas de resolver problemas te conducirá a desarrollar nuevas habilidades y a adquirir conocimientos matemáticos. Si te equivocas, no tengas miedo de intentarlo otra vez, revisa tu procedimiento y corrige si lo consideras necesario. **El error es una oportunidad para aprender.**


El trabajo colaborativo enriquece tus estrategias y procedimientos.

Te invitamos a compartir tus estrategias de solución y a escuchar y tomar en cuenta las de tus compañeros de clase. Una idea puede ser enriquecida escuchando a los demás. Recuerda que puedes preguntar a tu profesor o a tus compañeros. Juntos podrán relacionar lo que sabían con lo que están aprendiendo. Por lo anterior, encontrarás también muchas oportunidades para proponer soluciones de manera **individual**, en **parejas**, en **equipo** o en **grupo**.

Nuestro principal objetivo al escribir este libro es que adquieras, de manera significativa, los aprendizajes esperados del grado y te familiarices con la forma de pensar en matemáticas. Así podrás hacer de esta asignatura una herramienta útil para resolver problemas en otros contextos y en tu vida personal, al tiempo que comprendes la relevancia que tiene en la sociedad.

Estamos seguros de que el esfuerzo que hemos puesto al escribirlo se verá reflejado en tu aprendizaje a lo largo de este ciclo escolar.

Disfrútalo mucho.

Los autores

¿Cómo trabajarás en este curso?

¿Para qué sirven las matemáticas?

Mediante el trabajo con este libro aprenderás que las matemáticas te ayudarán a resolver problemas en la vida. Desarrollarás diversas formas de analizar problemas, aprenderás técnicas y procedimientos que se han construido a lo largo de muchos años y que te permitirán no solo resolverlos, sino también aportar argumentos que justifiquen tus resultados y te ayuden a validar tus conclusiones.

Lo anterior se resume en el siguiente esquema:

¿Qué encontrarás en el libro?

Los problemas con los que se inicia cada secuencia didáctica están planteados en diversos contextos que te resultarán interesantes. Las actividades que los acompañan tienen como finalidad que utilices lo que has aprendido previamente y des significado a nuevos aprendizajes. Asimismo, buscamos que reflexiones sobre aspectos de los problemas que te permitirán trabajarlos con diferentes estrategias y que desarrolles la capacidad de razonar en distintos ámbitos y con herramientas diversas.

Entre los propósitos de este libro, también están que desarrolles tu imaginación y tu capacidad de organizar y analizar información para encontrar patrones y hacer nuevos cuestionamientos. Además, queremos que aprendas, mediante la reflexión y la comprensión, técnicas aritméticas, geométricas, algebraicas o estadísticas que te resulten significativas.

Desarrollar estas capacidades no es fácil. Para ello, es importante que te comprometas con tu aprendizaje y con el de tus compañeros por medio del trabajo colaborativo, que estará presente en todas las secuencias didácticas de este libro. Considera que, en un equipo, cada integrante debe trabajar conjuntamente con los demás y escuchar varios puntos de vista con una actitud abierta y respetuosa.

¿Cómo trabajarás en el libro?

Las secuencias se dividen en lecciones. Cada una empieza con un "Punto de partida", que es un problema orientado a que retomes y apliques tus conocimientos. Después, en el "Trayecto formativo", encontrarás actividades individuales y colectivas que promueven la reflexión sobre tus acciones y tu aprender a aprender. Además, en esta sección se incluyen conceptos y procedimientos que sintetizan los contenidos que trabajaste.

El aprendizaje, en general, y el de las matemáticas en particular, requieren oportunidades para practicar lo que se ha estudiado. Por ello incluimos la sección "Practicar para avanzar", con ejercicios y problemas de aplicación que te permitirán hacer un seguimiento personal de tu progreso. Por último, cada secuencia se cierra con una serie de preguntas en la sección "Punto de llegada", para que valores si comprendiste los temas y conceptos que estudiaste. Si tienes dudas, es importante que tengas la confianza de comentarlas con tu profesor y con tus compañeros.

Secciones para saber más

Para complementar el trabajo de las secuencias didácticas, incluimos secciones que tienen objetivos específicos y que te ayudarán a mejorar tus capacidades de solucionar problemas, de argumentación y de reflexión.

"Resuelvo con tecnología". La tecnología está presente en la vida cotidiana y es un recurso importante en el aprendizaje de las matemáticas. Por una parte, permite agilizar los cálculos y, más valioso aún, proporciona herramientas dinámicas que te permiten simular, imaginar, predecir y reflexionar sobre situaciones matemáticas y analizar problemas en distintos contextos.

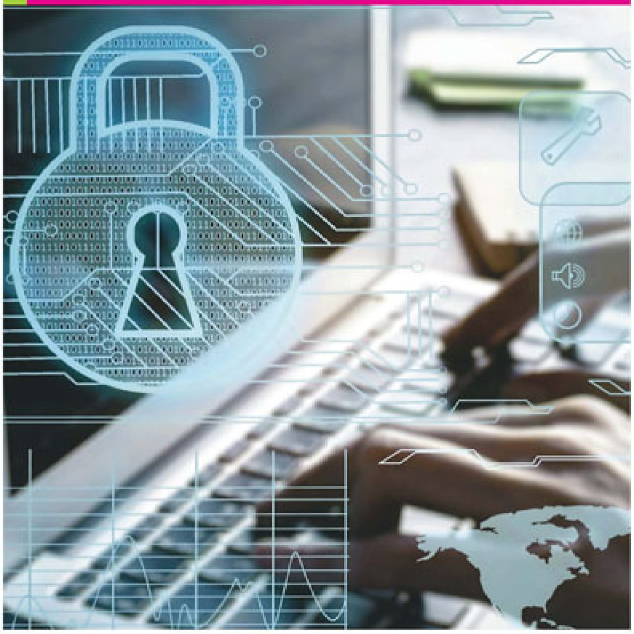
¿Cómo reviso mi avance?

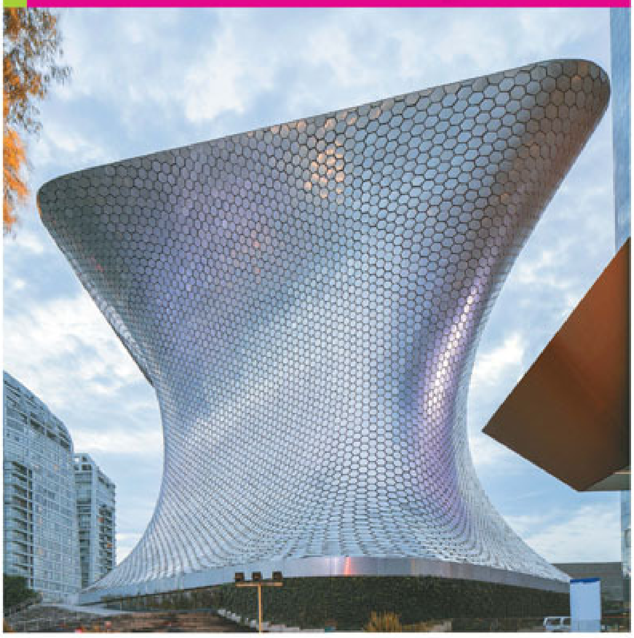
"Punto de encuentro". Presenta problemas en contextos diversos que te permitirán adentrarte en la relación de las matemáticas con diversos temas como el cuidado de la salud y del medioambiente, con la intención de que integres tu conocimiento general y reconozcas cómo las matemáticas permiten resolver problemas aparentemente muy distintos, pero que, vistos desde su estructura, son similares.

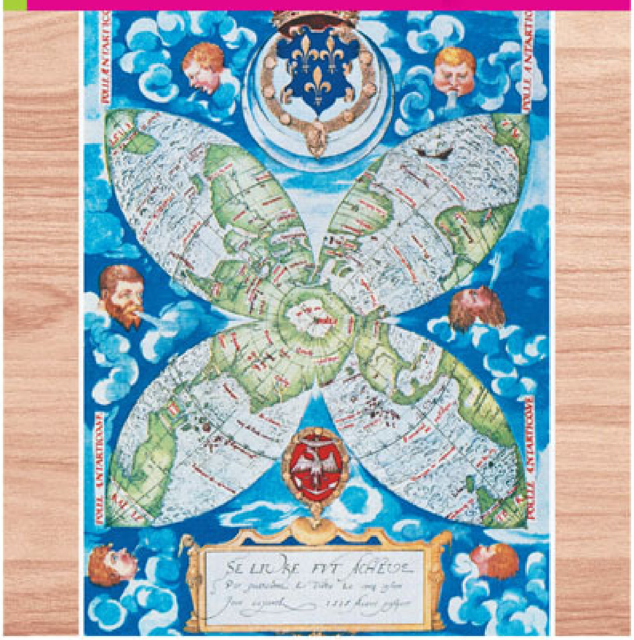
"Reviso mi trayecto". El desarrollo de tu capacidad de autoevaluación es un objetivo importante de este libro. Para ello, cada mes te enfrentarás a problemas en los que deberás aplicar e integrar lo que has aprendido. Nuestra intención es que hagas una pausa, revises y reflexiones sobre lo aprendido y lo que se te dificulta. Esto es necesario para que tus compañeros y tu profesor te ayuden a superar las dificultades antes de continuar con el estudio de otros temas y conceptos matemáticos, ya que todos se relacionan de alguna manera.

"Valoro mis fortalezas". Al final de cada trimestre encontrarás nuevos problemas con los cuales podrás tener un panorama más amplio de tus avances y áreas de oportunidad.

Índice







Así es tu libro

¿Cómo trabajarás en este curso?

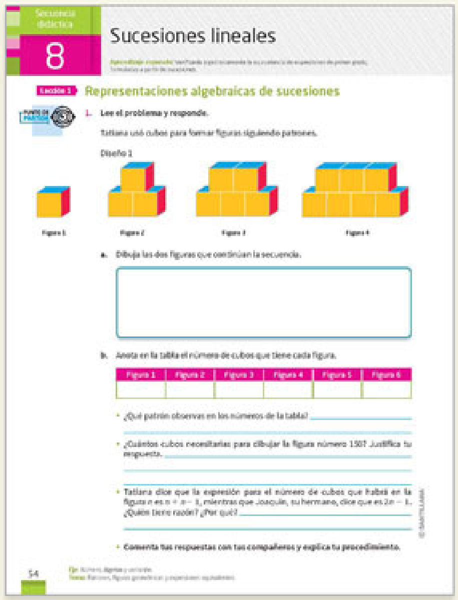
En estas páginas te explicamos cómo, a través de resolver problemas, construyes estrategias y conocimientos matemáticos, que te llevarán a resolver, cada vez, problemas más complejos.

Entrada de trimestre

Tu libro de Matemáticas está organizado en tres trimestres. Al iniciar cada uno encontrarás los aprendizajes esperados que estudiarás. Además tendrás la oportunidad de conocer información interesante que muestra una aplicación de las matemáticas.

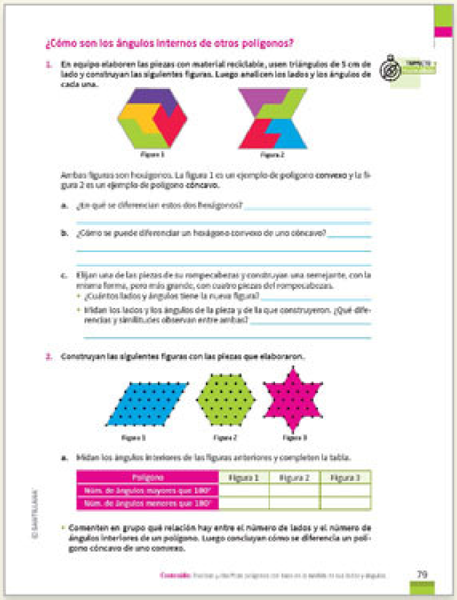
Secuencias didácticas

Cada trimestre de tu libro está integrado por secuencias didácticas con tres etapas de trabajo:



PUNTO DE PARTIDA

Te proponemos una situación interesante que te invita a revisar tus conocimientos previos, explorar soluciones y encontrar distintas formas de resolverla.

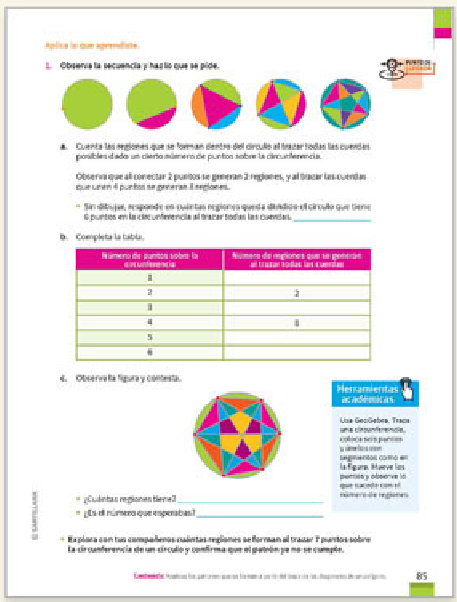


TRAYECTO FORMATIVO

Durante esta etapa realizarás actividades individuales y colectivas que te permitirán construir conocimientos, desarrollar habilidades, fortalecer tus actitudes y valorar tu trabajo. En el desarrollo de las secuencias didácticas, hallarás definiciones y procedimientos para que los analices, con base en tu experiencia en clase, y elabores conclusiones.

PUNTO DE LLEGADA

En esta última etapa de la secuencia didáctica encontrarás una lista de problemas desafiantes para que apliques lo que aprendiste. Podrás reflexionar de manera individual o colectiva acerca de tu trabajo e identificar tus avances mediante el análisis de tus resultados y procedimientos.



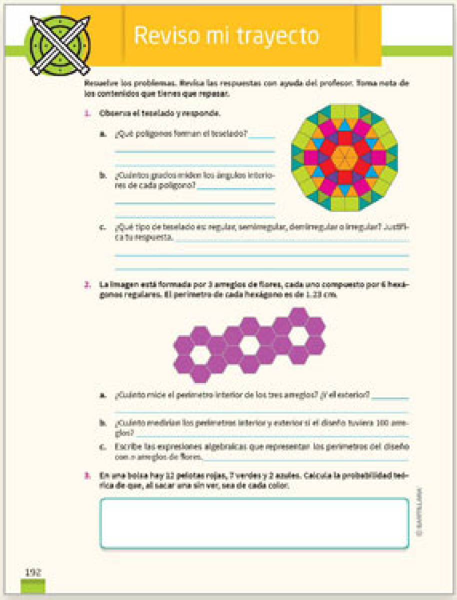
En el desarrollo de las secuencias encontrarás los siguientes apartados:

Practicar para avanzar
Te proponemos problemas y actividades para fortalecer lo que estás aprendiendo en la secuencia didáctica.

Glosario
Se definen algunas palabras que te pueden resultar de difícil comprensión.

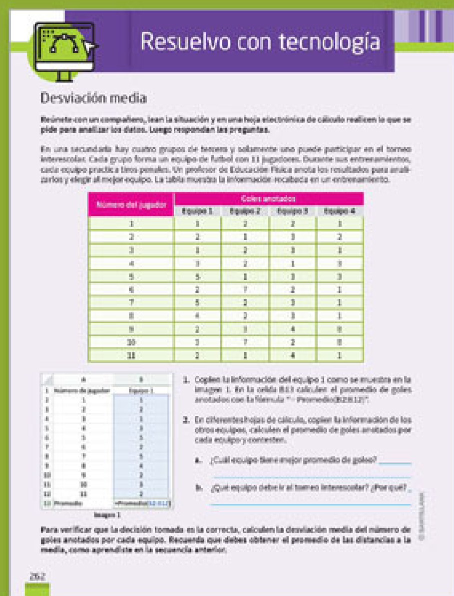
Herramientas académicas
Te ofrece actividades para que las resuelvas con ayuda de la tecnología. También encontrarás recomendaciones de páginas electrónicas impresas e interactivos para que enriquezcas lo que has aprendido.

A lo largo del trimestre encontrarás las secciones:



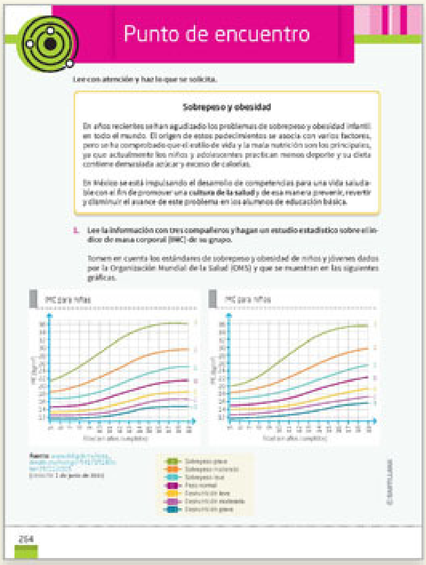
Reviso mi trayecto

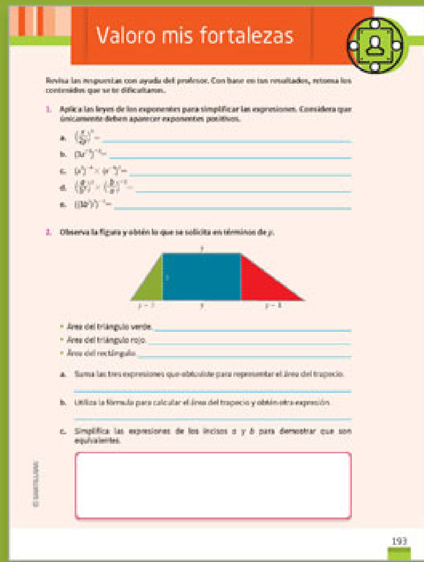
Al final de cada mes te proponemos problemas para que apliques lo que has aprendido, valores tus avances e identifiques tus áreas de oportunidad.



Resuelvo con tecnología

A lo largo de cada trimestre encontrarás dos proyectos tecnológicos para reforzar lo que aprendiste en la secuencia didáctica anterior y desarrolles tus habilidades digitales.





Punto de encuentro

Te proponemos actividades en las que podrás relacionar lo aprendido en Matemáticas con otras asignaturas y campos del conocimiento.

Valoro mis fortalezas

Cada trimestre cierra con una serie de problemas que integran varios temas trabajados, para que apliques y analices los conocimientos y las habilidades que has obtenido a lo largo del trimestre.

Fuentes de información

Encontrarás sugerencias de libros y direcciones electrónicas para que halles información complementaria y pertinente sobre temas relacionados con la asignatura.

Trimestre 1

En este trimestre:

- Resolverás problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
- Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.
- Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
- Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpretarás y resolverás problemas que se modelan con estos tipos de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Verificarás algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
- Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
- Deducirás y usarás la relación entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Cifrado de información

En la actualidad podemos enviar y recibir información por numerosos medios electrónicos. Esta información consiste en correos electrónicos, imágenes, contraseñas, datos personales y bancarios, entre otros.

Debido al mal uso que se hace de los datos y al costo que representan para las empresas e instituciones el acceso no autorizado y la intercepción de información, se ha vuelto imprescindible usar la **criptografía** para mantener segura la información.

La criptografía es una técnica que permite proteger la información.

Existen muchas técnicas para cifrar y descifrar la información, una de ellas es el método de Gauss Jordan, que también se usa en la resolución de **sistemas de ecuaciones** con *n* incógnitas.

¿Te imaginas cómo las matemáticas permiten proteger la información?

La criptografía se usa para prevenir el acceso y uso no autorizado de los recursos de una red o un sistema informático.

Secuencia didáctica 1

Multiplicación y división de fracciones y decimales

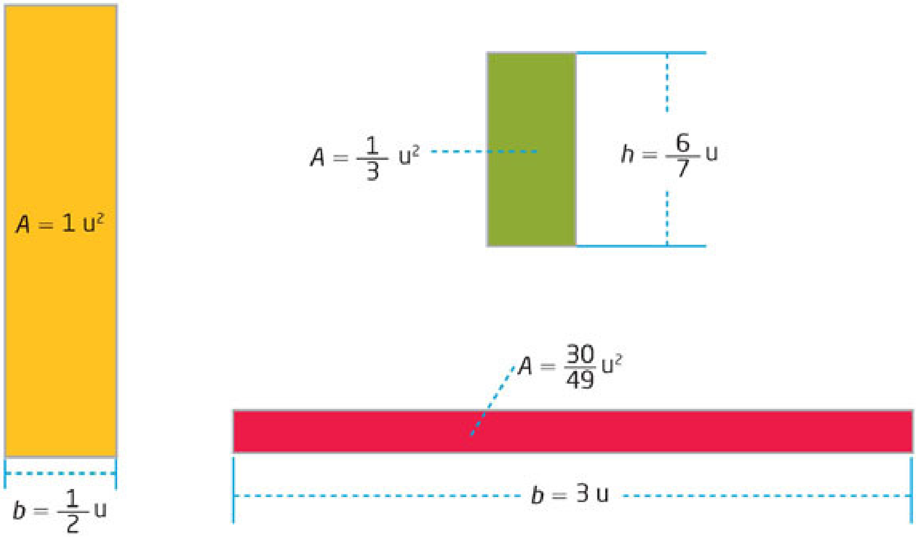
Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Lección 1

Multiplicación de fracciones

PUNTO DE PARTIDA

1. Reúnete con dos compañeros, observen los rectángulos y contesten.



a. ¿Cuánto mide de altura el rectángulo amarillo? __________

b. ¿Cuánto mide de base el rectángulo verde? __________

c. ¿Cuánto mide de altura el rectángulo rojo? __________

d. ¿Qué operación u operaciones necesitan resolver para obtener las medidas anteriores? __________

e. ¿Qué información requieren? ¿La tienen? __________

f. Escriban el procedimiento, las operaciones y el razonamiento que utilizaron para encontrar las medidas faltantes de los rectángulos.

- **Comenten y comparen sus resultados y procedimientos. Con ayuda del profesor, concluyan cuál es el procedimiento más adecuado.**

Inverso multiplicativo

1. **Retoma el caso de los rectángulos y observa cómo al multiplicar la base por la altura del rectángulo amarillo el resultado es 1. Luego resuelve.**

TRAYECTO FORMATIVO

   a. Escribe una fracción que multiplicada por 6 dé como resultado 1. ____________

   b. Escribe una fracción que multiplicada por 2 dé como resultado 1. ____________

   c. Escribe dos números naturales. Para cada uno, encuentra una fracción que al multiplicarla por él dé como resultado 1.______________________________

   ____

   d. A partir de los resultados anteriores, completa la siguiente regla. La letra *a* representa cualquier número natural.

$$a \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = 1$$

   e. Encuentra un número que al multiplicarlo por $\frac{2}{3}$, dé como resultado 1. ________

- **Observa cómo multiplicar *a* por un número para obtener 1 equivale a dividir *a* entre sí mismo, donde *a* es un número natural.**

Cuando se multiplican dos números y se obtiene como resultado 1, se dice que estos números son **inversos multiplicativos** o **recíprocos.**

El inverso multiplicativo de un número de la forma $\frac{a}{b}$ con a y $b \neq 0$ es $\frac{b}{a}$ ya que

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{3 \times 4}{4 \times 3} = \frac{12}{12} = 1$$

Practicar para avanzar

Responde lo que se te pide. Escribe en tu cuaderno el procedimiento que seguiste.

1. Encuentra el inverso multiplicativo de los siguientes números.

$\frac{1}{4}$: ____________ $\frac{3}{7}$: ____________ 1: ____________

Compara tus respuestas con las de un compañero. Si hay alguna diferencia, coméntenla con su profesor.

División de fracciones

1. Observa la tabla y responde.

5	15	45	135	405	1 215

a. ¿Qué relación hay entre los números que se muestran en la tabla? ____________

____

b. ¿Qué operación debes hacer para obtener el segundo número a partir del primero?

____

c. ¿Qué operación debes hacer para obtener el quinto número a partir del sexto?

____

d. ¿Puedes obtener los demás números con las mismas operaciones? Justifica tu respuesta. ____

____

e. Anota en los recuadros las operaciones que se deben hacer para obtener el número siguiente de acuerdo con el sentido que marcan las flechas.

2. Haz las multiplicaciones que indican las flechas y completa la tabla.

$\times\frac{1}{5}$ $\quad\times\frac{1}{5}$ $\quad\times\frac{1}{5}$ $\quad\times\frac{1}{5}$ $\quad\times\frac{1}{5}$

1215					

a. Encuentra un número con el que obtengas los anteriores mediante una división y anota la operación en el recuadro.

- **Reúnete con un compañero y comparen sus tablas. Establezcan una relación entre las operaciones de ambas tablas y coméntenlas. Luego lean la siguiente información y validen su conclusión.**

Al multiplicar un número por otro, se obtiene el mismo resultado que al dividir el número entre el recíproco del segundo. Por lo anterior, para dividir una fracción entre otra se puede recurrir a una multiplicación usando el recíproco.

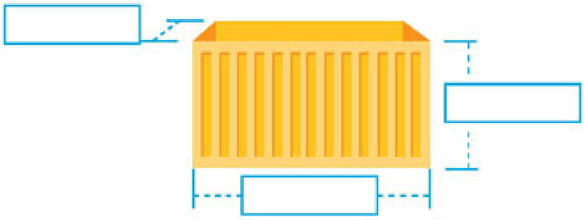
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Por ejemplo: $\frac{1}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{1 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$

Multiplicación y división de fracciones

3. **Lee el problema y responde las preguntas.**

Una empacadora tiene contenedores de 1 m de ancho, 1 m de largo y 1 m de alto. Para poder aprovechar mejor su bodega, reemplazarán los contenedores por cajas cuyo ancho sea $\frac{3}{4}$ del anterior, su altura sea $\frac{8}{6}$ de la altura anterior y su largo, $1\frac{1}{3}$ del anterior. Calcula las medidas de la nueva caja.



a. Calcula el volumen de la caja. Escribe tu procedimiento.

b. ¿Se puede operar con las fracciones como están expresadas o se necesita hacer alguna conversión? Justifica tu respuesta. ______

c. Si en cada jornada se empaca $\frac{1}{3}$ de m^3 de mercancía, ¿cuántas jornadas se necesitan para llenar una caja? ______

d. Si en cada jornada se empacaran $\frac{2}{3}$ de m^3 de mercancía, ¿el resultado sería mayor o menor al del inciso anterior? ¿Por qué? ______

e. Considera la información del inciso *d* y calcula cuántas jornadas se necesitan para llenar una caja.

- **Comparen sus respuestas y procedimientos en grupo y resuelvan sus dudas con ayuda del profesor.**

Lección 3

Multiplicación y división de decimales

1. Lee el problema y responde en tu cuaderno.

Se está construyendo un jardín vertical en la entrada de un colegio. El jardín debe medir 10.5 m de altura. Hasta ahora se han construido 2.525 m.

a. Si cada día construyen 0.725 m, ¿cuánto tardarán los trabajadores en terminar?

b. Si la base del jardín mide 13.5 m, ¿cuánto tendrá de área?

c. Cada metro cuadrado de plantas cuesta $235.50. ¿Cuánto costará plantar el jardín completo?

2. Observa los resultados de la actividad anterior y analiza lo siguiente.

a. En tu curso de primer grado aprendiste que si uno o más factores de una multiplicación es una fracción o un número decimal, el resultado no siempre es mayor que los factores. ¿En qué casos no? ______

______

b. En la división de números naturales, ¿cómo es el cociente con respecto al dividendo y al divisor? ______

- ¿Cómo es el cociente si se involucran fracciones o números decimales? ¿De qué depende? ______

  ______

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y tu profesor. Anoten una conclusión común sobre la multiplicación y división de decimales.**

3. Resuelve las operaciones.

a. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} =$ b. $2 \times \frac{1}{3} =$ c. $\frac{7}{8} \div \frac{4}{5} =$

d. $2 \div 0.5 =$ e. $0.123 \times 3.2 =$ f. $2.35 \times 4 =$

4. Lee la información y responde en tu cuaderno.

Se pintarán tres bardas de 13.5 m de largo y 10.5 m de alto cada una mezclando pintura azul, verde y blanca en diferentes proporciones. Para lo anterior, se compraron diferentes cantidades de pintura de cada color, de tal forma que:

$\frac{2}{3}$ del presupuesto se gastó en pintura verde, $\frac{1}{6}$ del presupuesto en pintura azul y $\frac{1}{6}$ en pintura blanca.

- La primera barda se pintará mezclando $\frac{1}{2}$ de la pintura azul, $\frac{1}{3}$ de la pintura verde y $\frac{1}{4}$ de la pintura blanca.
- La segunda barda se pintará mezclando $\frac{1}{8}$ de la pintura azul, $\frac{1}{3}$ de la pintura verde y $\frac{3}{4}$ de la pintura blanca.
- La tercera barda se pintará mezclando $\frac{1}{4}$ de la pintura azul y $\frac{3}{4}$ de la pintura verde.

a. Completa la tabla con información del problema. Anota la fracción de pintura que se usará en cada barda y la fracción del presupuesto que se empleó para comprar cada color.

	Barda 1	Barda 2	Barda 3	Presupuesto
Pintura azul				
Pintura verde				
Pintura blanca				

- ¿Cómo puedes determinar la fracción del presupuesto que se usó para comprar la pintura verde con la que se pintará la barda 2? ____________
- ¿Qué fracción del presupuesto se usó para comprarla? ____________

b. Considera que el presupuesto que se usó para comprar la pintura fue de \$2 105.70 y completa la tabla con la cantidad de dinero que se gastó para comprar la pintura de cada color.

	Barda 1	Barda 2	Barda 3
Pintura azul			
Pintura verde			
Pintura blanca			

Para **multiplicar** o **dividir** un **número fraccionario** por un **decimal**, se puede convertir la fracción a su forma decimal, siempre y cuando no tenga periodo. Si la fracción se convierte en decimal periódico, se perderá precisión en el resultado y es mejor operar con la fracción.

$$\frac{3}{8} \times 3.56 = 0.375 \times 3.56 = 1.335$$

También se puede convertir el número decimal en fracción antes de operar.

$$\frac{3}{7} \div 2.8 = \frac{3}{7} \div \frac{14}{5} = \frac{15}{98}$$

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. Hagan lo que se pide en equipos de cuatro integrantes.

a. Diseñen un problema en el que se necesite multiplicar y dividir números fraccionarios y decimales de manera conjunta.
b. Entreguen su problema al resto de los equipos para que lo resuelvan.

- **Comenten en grupo los resultados y las dificultades presentadas tanto al diseñar el problema como al resolver los de los demás equipos.**

Secuencia didáctica

2

Multiplicación de números enteros

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Lección 1

Números positivos y negativos

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee la situación y responde las preguntas.

Un biólogo necesita comparar características de distintos árboles para reforestar un parque. Entonces eligió los siguientes tipos considerando que, durante el primer año y medio, en promedio:

- El árbol A aumenta 10 cm el largo de su raíz y 15 cm el largo de su tronco cada mes.
- El árbol B aumenta 20 cm el largo de su tronco y 10 cm el de su raíz cada mes.
- El árbol C mantiene su raíz igual cada mes y aumenta 15 cm el largo de su tronco.

a. El crecimiento de las raíces se considera negativo con respecto al nivel del suelo y el de los troncos, positivo con respecto a la misma referencia. Si los tres árboles que se plantan tienen un tronco de 50 cm de altura y una raíz de 20 cm de profundidad, ¿qué nivel con respecto al suelo alcanzarán su tronco y su raíz después de un año?

- Árbol A: ____________________
- Árbol B: ____________________
- Árbol C: ____________________

b. En el parque, la altura promedio de los árboles es de 7 metros. ¿Cuánto tiempo tardará cada tipo de árbol en alcanzar la altura promedio? ____________________

____

- **Comenta con tus compañeros qué diferencia observan entre la longitud de las raíces y de los troncos de los distintos árboles con este tipo de medición.**

Multiplicando números con signo

TRAYECTO FORMATIVO

1. Desarrolla las multiplicaciones como sumas repetidas y anota el resultado. Observa el ejemplo.

$4 \times 8 = 8 + 8 + 8 + 8 = 32$	$4 \times (-8) = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = -32$
$3 \times 8 = 8 + 8 + 8 = 24$	$3 \times (-8) =$ ____________
$2 \times 8 =$ ____________	$2 \times (-8) =$ ____________
$1 \times 8 =$ ____________	$1 \times (-8) =$ ____________
$0 \times 8 =$ ____________	$0 \times (-8) =$ ____________

a. Describe cómo varía el resultado de cada multiplicación al cambiar de renglón.

____

____

b. Con base en tu respuesta anterior, resuelve las siguientes multiplicaciones.

$(-1) \times 8 =$ ______	$(-1) \times (-8) =$ ______
$(-2) \times 8 =$ ______	$(-2) \times (-8) =$ ______
$(-3) \times 8 =$ ______	$(-3) \times (-8) =$ ______
$(-4) \times 8 =$ ______	$(-4) \times (-8) =$ ______
$(-5) \times 8 =$ ______	$(-5) \times (-8) =$ ______

c. Repite la actividad en tu cuaderno, pero cambia el número rojo por otro. Luego responde:

- ¿Cómo se relaciona el tipo de número (positivo o negativo) de la operación con el tipo de número del resultado? ______
- ¿Qué relación hay entre el carácter positivo o negativo del resultado y el carácter positivo o negativo de los factores? ______

d. Comenta tus respuestas con un compañero. Con base en ellas, completen los enunciados con las palabras **positivo o negativo** según corresponda.

- El resultado de multiplicar dos números positivos es ______
- El resultado de multiplicar un número positivo por uno negativo es ______
- El resultado de multiplicar un número negativo por uno positivo es ______
- El resultado de multiplicar dos números negativos es ______

Al multiplicar números enteros, se deben seguir las leyes de los signos:
El producto de dos factores positivos es positivo.
El producto de dos factores negativos es positivo.
El producto de un factor positivo por un factor negativo o viceversa es negativo.

Por ejemplo:

$2 \times 3 = 6$ $\quad (-2) \times (-3) = 6$ $\quad 2 \times (-3) = -6$ $\quad (-2) \times 3 = -6$

Practicar para avanzar

1. Resuelve las operaciones y responde.

a. $(-8)\,(2) =$ ______ **b.** $(-35)\,(-12) =$ ______ **c.** $(-25)\,(-1) =$ ______
d. $(3)\,(-17) =$ ______ **e.** $(25)\,(-1) =$ ______ **f.** $(1)\,(-1) =$ ______

- ¿Qué se obtiene al multiplicar cualquier número por -1? ______

Lección 2

Más sobre multiplicación

1. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular los resultados.

- $[(-5) \times 4] \times 4 =$ ______
- $(-5) \times [4 \times 4] =$ ______

a. ¿Cómo son los resultados de las operaciones? ¿Por qué? ______

______

Propiedad asociativa de la multiplicación. Cuando se multiplican tres o más números, la forma de agrupar la multiplicación no afecta el resultado. Por tanto, la multiplicación se puede escribir sin paréntesis, es decir:

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 2 \times 3 \times 4$$

b. Con base en lo anterior, resuelve las siguientes operaciones.

- $(-5) \times 4 \times 4 =$ ______
- $(-11) \times (-1) \times (-2) =$ ______
- $7 \times -2 \times 3 =$ ______
- $(-5) \times (-4) \times (-3) =$ ______

2. Resuelve las operaciones y responde.

$(-5)\,(-6)\,(7)\,(-2)\,(3) =$ ______ $(-5)\,(-6)\,(-7)\,(-2)\,(3) =$ ______

a. ¿Qué sucede con el resultado cuando la cantidad de factores negativos es impar? Justifica tu respuesta y da un ejemplo. ______

______

b. ¿Qué sucede con el resultado cuando la cantidad de factores negativos es par? Explica tu respuesta y da un ejemplo. ______

______

Al multiplicar números enteros, si la cantidad de factores negativos es impar, el resultado será negativo. De lo contrario, será positivo.

Por ejemplo, $(-2)\,(-3)\,(-1)\,(-4) = 24$ y $(-2)\,(-3)\,(-1)\,(-4)\,(-1) = -24$

3. Resuelve las operaciones.

a. $(-8)\,(2) =$ ______
b. $(-35)\,(-12) =$ ______
c. $(-25)\,(-1) =$ ______
d. $(3)\,(-17) =$ ______

- **Validen sus respuestas en grupo y comenten cómo podrían verificarlas utilizando una calculadora.**

Herramientas académicas

Se puede operar con números enteros en la calculadora. Para escribir un número negativo en la calculadora, se antepone la tecla "(−)" al número. No es necesario utilizar paréntesis para diferenciar el signo de los números de los signos de suma y resta. Los números positivos no llevan signo.

4. Responde y comprueba tus resultados con tu calculadora.

a. ¿Cómo debe ser el número del valor faltante de las siguientes operaciones? ¿Positivo o negativo? Justifica tu respuesta.

$(-2)(\quad) = 8$ ______________________

$(\quad)(5) = -15$ ______________________

b. Luis ha ahorrado \$350 y Marcela tiene una deuda de \$185. Representa con números con signo estas cantidades. ______________________

- Si al final de un año se duplican tanto la deuda de Marcela como el ahorro de Luis, ¿cuánto tendrá cada uno? ______________________

____

- **Comenta con tus compañeros si tuviste alguna dificultad para encontrar los valores faltantes.**

Aplica lo que aprendiste.

1. Lee la situación y responde en tu cuaderno.

PUNTO DE LLEGADA

En una competencia de ecoturismo en Chiapas, se completan pruebas en las que se ganan o se pierden puntos. La última prueba se lleva a cabo en la sima de las Cotorras, un hundimiento de 140 m de profundidad en la tierra. Los competidores Mario, Lorena y Pablo deberán descender a rapel para completar esta prueba. Quienes desciendan entre 0 y 50 m serán penalizados y obtendrán −10 puntos por cada metro descendido. Quienes desciendan entre 51 y 100 m obtendrán 20 puntos por metro descendido. Si descienden entre 101 y 140 m, obtendrán 50 puntos por metro descendido.
Al terminar la actividad, Pablo descendió los 140 m, Lorena descendió 25 m y Mario quedó 70 m debajo del nivel del suelo.

a. Anota y resuelve las operaciones necesarias para saber cuántos puntos obtuvo cada competidor.
b. ¿Quién de los tres obtuvo puntos negativos? Justifica tu respuesta.
c. Indica quién fue el ganador de la prueba y por qué.
d. Si Luis obtuvo –350 puntos, ¿cuántos metros descendió?

- **Comenta con tus compañeros tu respuesta. Con ayuda de tu profesor lleguen a una conclusión de cómo resolver el problema.**

División de números enteros

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Lección 1

¿Qué temperatura marcaba?

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee el problema y haz lo que se te indica.

En una localidad se han registrado algunas temperaturas en años recientes. En este año, en la primera semana de enero, la temperatura promedio fue de −12 °C, tres veces más fría que la registrada el año pasado en esa semana; la segunda semana de enero, la temperatura promedio fue de −10 °C, dos veces más fría que la registrada el año pasado. En la tercera semana, la temperatura promedio fue de −8 °C y en la misma semana del año anterior, de −4 °C.

- ¿Qué temperatura promedio se registró en la primera semana de enero del año pasado?
- ¿Y en la segunda semana de enero del año pasado?
- ¿Cómo cambió la temperatura promedio en la tercera semana de enero de este año respecto de la del año pasado?

a. Reúnete con tres compañeros y respondan.

- ¿Qué operaciones necesitan realizar para responder las preguntas?

____

____

____

- ¿Qué característica tienen estas operaciones? ______________________

b. ¿Qué signo deben tener las temperaturas promedio? Justifica tu respuesta.

____

- **Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Con ayuda de su profesor, elijan el procedimiento que les parezca más adecuado.**

División de números positivos y negativos

TRAYECTO FORMATIVO

1. Analiza lo siguiente y responde en tu cuaderno.

Se tiene la operación $3 \times 5 = 15$. Si se multiplican ambos términos por $\frac{1}{5}$, se obtiene:

$$(3 \times 5)\left(\frac{1}{5}\right) = 15\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{(3 \times 5)}{5} = 15\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$3 = 15\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$3 = \frac{15}{5}$$

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Multiplicación y división

Considerando lo anterior, para $3 \times (-5) = -15$, se tiene que

$$(3 \times (-5))\left(\frac{1}{-5}\right) = -15\left(\frac{1}{-5}\right)$$

$$3 = \frac{-15}{-5}$$

a. Realiza los mismos pasos para $(-3) \times (-5) = 15$ y $(-3) \times 5 = -15$.

2. **Analiza la tabla con dos compañeros y hagan lo que se pide.**

Multiplicación	División
$3 \times 5 = 15$	$15 \div 5 = 3$
$3 \times (-5) = -15$	$15 \div (-5) = -3$
$(-3) \times (-5) = 15$	$(-15) \div (-5) = 3$
$(-3) \times 5 = -15$	$(-15) \div 5 = -3$

a. ¿Las mismas leyes de los signos de la multiplicación pueden utilizarse para la división? Contesten en su cuaderno.
   - ¿Tiene que ver esto con que la multiplicación y la división son operaciones inversas? Expliquen.

b. Con base en la tabla anterior, completen las afirmaciones.
   - El resultado de multiplicar o dividir dos números positivos o negativos es ____
   ____
   - El resultado de multiplicar o dividir dos números, uno positivo y otro negativo, es ____

- **Comenten en grupo sus respuestas y analicen la siguiente información.**

La **división** *a* entre *b* equivale a multiplicar *a* por el inverso multiplicativo de *b*, por lo que las reglas que aprendiste pueden aplicarse para dividirlos.
Al dividir dos números positivos, el resultado es positivo.
Al dividir dos números negativos, el resultado es positivo.
Al dividir un número positivo entre un número negativo o viceversa, el resultado es negativo.
Por ejemplo: $8 \div 4 = 2$, $(-8) \div 4 = -2$, $8 \div (-4) = -2$, $(-8) \div (-4) = 2$.

3. **Utiliza las reglas anteriores y responde en tu cuaderno las preguntas del problema inicial.**

a. ¿Qué temperatura promedio se registró en la primera semana de enero del año pasado?
b. ¿Y en la segunda semana de enero del año pasado?
c. ¿Cómo cambió la temperatura promedio en la tercera semana de enero de este año respecto de la misma semana del año pasado?

- **Comenten sus respuestas en grupo para validarlas.**

Lección 2
Multiplicación y división de números con signo

1. Observa las operaciones y responde las preguntas.

a. $(-12 \div \_\_\_\_) = -4$

- ¿Qué signo debe tener el divisor para que el cociente tenga signo negativo?

____

- ¿Qué valor absoluto debe tener el divisor para que el cociente sea 4?

____

b. $(\_\_\_\_ \div -3) = 3$

- ¿Qué signo debe tener el dividendo para que el cociente tenga signo positivo?

____

- ¿Qué valor absoluto debe tener el dividendo para que el cociente sea 3?

____

2. Resuelve con tu calculadora.

- $45 \div (-9) =$ ____
- $(-36) \div (-36) =$ ____
- $100 \div (-10) =$ ____

a. ¿De qué manera se escriben en la calculadora los números negativos o menores que cero? _______________

b. ¿Qué significa que la calculadora no muestre en el resultado ningún signo?

____

- **Compara con un compañero cómo ingresó cada uno en la calculadora los números con signo. Comenten si hay más de una forma de ingresarlos.**

Practicar para avanzar

1. Resuelve las operaciones.

a. $-25 \div 5 =$ ________ b. $30 \div -3 =$ ________ c. $-12 \div -4 =$ ________

d. ________ $\div 4 = -5$ e. $-49 \div$ ________ $= 7$ f. $-81 \div$ ________ $= -9$

2. Resuelve en tu cuaderno.
Una máquina perfora verticalmente 2 metros del suelo cada día.

a. ¿A qué altura con respecto al suelo estará después de 3 días?
b. ¿Cuántos días después de iniciar estará a -14 m con respecto al nivel del suelo?

Comenta con tus compañeros qué significa que el resultado tenga signo negativo o positivo. Lleguen a una conclusión en común.

Aplica lo que aprendiste.

1. **En equipos de tres integrantes, lean las instrucciones del juego y contesten.**

PUNTO DE LLEGADA

Sandra y Miguel van a jugar con sus amigos un juego con las siguientes instrucciones.

- Formen dos equipos de tres integrantes. Lancen una moneda para decidir cuál será el equipo A y cuál el equipo B.
- Por turnos, cada participante tendrá 3 minutos para hacerle las preguntas del juego a sus compañeros y que ellos las contesten.
- Cuenten los aciertos obtenidos. El equipo A anotará la cantidad de respuestas correctas con signo negativo y el equipo B, con signo positivo.
- Al terminar cada turno, el jugador lanzará un dado.
  - Si cae un número par, el valor del dado se multiplicará por la cantidad obtenida en el turno.
  - Si cae un número impar, se le pondrá signo negativo al valor del dado y se multiplicará por la cantidad obtenida en el turno.
- Al participar todos los jugadores, gana el equipo con mayor puntuación.

a. ¿El que el equipo A anote sus resultados con signo negativo lo coloca en desventaja respecto del equipo B? Explica tu respuesta.

____

b. La tabla representa los resultados de los dos primeros turnos.

	Equipo A	Equipo B
Turno 1	3 respuestas correctas y 2 en el dado.	4 respuestas correctas y 5 en el dado.
Turno 2	5 respuestas correctas y 3 en el dado.	3 respuestas correctas y 4 en el dado.

- Si ambos equipos inician con cero puntos, ¿cuál será la puntuación de cada equipo después de dos turnos? ______________

c. Supón que el equipo A se encuentra en la casilla 6 y el B en la casilla -6.

- ¿Cuántas respuestas correctas tuvo cada equipo? ______________
- ¿Qué número obtuvo cada equipo al lanzar el dado? ______________
- ¿Es la única manera de que ambos equipos hayan obtenido esa puntuación?

____

____

- **Comenta con tus compañeros qué características tienen en común la multiplicación y división de números positivos y negativos, y qué aplicaciones conocen.**

Potencia de un número entero

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.

Lección 1 Productos

PUNTO DE PARTIDA

1. **Lee el problema y responde.**

La encargada de la cafetería de la escuela lleva un paquete de galletas por día, de lunes a viernes. Cada paquete contiene 5 cajas de galletas que a su vez contienen 5 galletas cada una.

a. ¿Cuántas cajas lleva a la semana? ___

b. ¿Cuántas galletas lleva cada día? ___

c. ¿Cuántas galletas lleva en total a la semana? ___

d. ¿Qué operación u operaciones es necesario resolver para contestar las preguntas anteriores? Explica tu respuesta. ___

___

___

___

___

- **Compara tus respuestas con las de un compañero. Discutan con su profesor sus dudas, en caso de tenerlas.**

Potencias

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Lee los problemas y responde.**

Problema 1. Según lo que estudiaste en primer grado, si los lados de un cubo miden 5 cm…

a. ¿Cuál es su volumen? ___

b. ¿Qué operación resolviste para calcularlo? ___

Problema 2. En una granja, cierta colonia de insectos aumenta su población al triple después de cada mes durante los primeros 12 meses de cultivo. Si se coloca un insecto por granja en la fecha inicial…

a. ¿Cuántos insectos habrá al final del primer mes? ___

b. ¿Cuántos insectos habrá al final del quinto mes? ___

c. ¿Cuántos insectos habrá al final del undécimo mes? ___

- **Valida tus operaciones con ayuda de tu profesor y compañeros. Comenten si todos utilizaron el mismo procedimiento o no.**

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Multiplicación y división

2. **Analiza las operaciones que has resuelto hasta el momento para cada problema de la secuencia y contesta.**

a. ¿De qué tipo son las operaciones? ____________________

b. ¿Qué tienen en común? ____________________

____

c. Reúnete con dos compañeros y comenten si hay una manera de **simplificar** la operación:

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6.$$

Anoten en su cuaderno las opciones sugeridas.

Glosario

simplificar. En matemáticas, simplificar una expresión es escribirla de una forma más sencilla. Por ejemplo: $3a + 4a - a = 6a$

- **Compartan sus respuestas con sus compañeros y elijan la simplificación más adecuada de la multiplicación del inciso *c*. Después analicen la siguiente información y coméntenla en grupo.**

Cuando se multiplica un número por sí mismo varias veces, se calcula una **potencia.** Las potencias se denotan con a^n, donde a es la **base** o el número que se multiplica, y n es el exponente, un número natural que indica el número de veces que se multiplica por sí misma la base.

3. **De acuerdo con la información anterior, escribe como potencia las operaciones de los incisos *b* y *c* del problema 2 de la página anterior.**

Inciso *b*

Potencia: ____________________ Resultado: ____________________

Base: ____________________ Exponente: ____________________

Inciso *c*

Potencia: ____________________ Resultado: ____________________

Base: ____________________ Exponente: ____________________

- **Compara tus respuestas con las de un compañero. Si tienen dudas, pregunten a su profesor.**

Practicar para avanzar

1. Expresa como potencia o multiplicación las expresiones, según corresponda, y calcula el resultado.

a. $1 \times 1 \times 1 \times 1 =$ ____________________

b. $10^2 =$ ____________________

c. $12 \times 12 \times 12 =$ ____________________

d. $5^3 =$ ____________________

e. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ ____________________

f. $25^3 =$ ____________________

Valida tus respuestas con ayuda de una calculadora. Comenten en grupo sus resultados y resuelvan juntos sus dudas.

Lección 2

Potencias de números negativos

1. **Responde en tu cuaderno.**

   a. Utiliza la propiedad asociativa para resolver la multiplicación $(-5) \times (-5) \times (-5)$.

   - ¿Cómo es el resultado de la primera multiplicación que resolviste?
   - ¿Por qué crees que ocurre lo anterior?
   - ¿Cómo es el resultado de la segunda?

   b. Sigue en tu cuaderno los mismos pasos para resolver $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$.

   - **Comparen sus respuestas en grupo y comenten por qué la multiplicación del inciso *a* da como resultado un número negativo y la del inciso *b*, un número positivo. Después lean lo siguiente.**

La multiplicación repetida de un número negativo puede escribirse como una potencia.

$$\underbrace{(-a) \times (-a) \times (-a) \ldots \times (-a)}_{n \text{ veces}} = (-a)^n$$

Al calcular la **potencia de un número negativo**, si el exponente es un número **par**, el resultado será **positivo**. Si el exponente es número **impar**, el resultado será **negativo**.

2. **Usa lo que aprendiste para multiplicar números con signo y responde.**

   a. ¿Cómo será el signo del resultado de $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$?

   ____

   b. ¿Y el de $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$? ______________

   c. Escribe ambas operaciones como potencias. ______________________

3. **Resuelve con base en lo anterior.**

   a. $(-15)^2 =$ ______________ b. $(-3)^5 =$ ______________

4. **Analiza las siguientes potencias y haz lo que se pide.**

   $(-9)^2 =$ ______________ $-9^2 =$ ______________

   a. Explica en qué se diferencian ambas potencias. ______________________

   ____

   b. ¿En cuál de las dos potencias la base es un número negativo? ______________

   c. Resuelve las potencias.

   - **Validen sus respuestas en grupo y comenten sus conclusiones sobre el cálculo de potencias de números negativos.**

Multiplicación de potencias

5. Considera lo siguiente y haz lo que se pide.

$$5^2 \times 5^3$$

Si $5^2 = 5 \times 5$ y $5^3 = 5 \times 5 \times 5$, la multiplicación de potencias puede reescribirse como:

$$5^2 \times 5^3 = (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

a. Escribe el resultado anterior como una potencia. ________

b. Escribe cómo se resuelve una multiplicación de potencias. ________

____

____

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y coméntenlas con su profesor. Después reflexionen sobre la siguiente información.**

> Cuando se **multiplican dos potencias** con la misma base, su producto mantiene la base y tiene como exponente la suma de los exponentes de los factores. Esto es, $a^m \times a^n = a^{m+n}$, donde a es un número entero y m y n son números naturales.
>
> Por ejemplo: $11^5 \times 11^3 = 11^{5+3} = 11^8$

6. Resuelve.

$(-3)^2 \times (-3)^3 =$ ________ $(-2)^2 \times (-2)^3 =$ ________

$6^3 \times 6^4 =$ ________ $(-1)^7 \times (-1)^6 =$ ________

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. Lee el problema y contesta.

Paola inicia una cadena de mensajes, la cual finaliza diciendo: "Envía mañana este mensaje a 5 contactos". Supón que Paola envió la cadena a 5 personas, que nadie rompe la cadena y que no se repiten los contactos.

a. ¿Cuántos mensajes se envían el día 1? ________

b. ¿Cuántos mensajes se enviarán el día 2? ________

c. ¿Cuántos mensajes se enviarán el día 3? ________

d. ¿En qué día se envían 3 125 mensajes? Justifica tu respuesta. ________

____

- **Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de tus compañeros. Si tienes dudas sobre lo trabajado en la secuencia, consulta a tu profesor.**

Secuencia didáctica

5

Exponentes negativos

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.

Lección 1

Cociente de potencias

PUNTO DE PARTIDA

1. **Lee con atención el problema y analiza las preguntas.**

En un experimento de entomología (estudio de los insectos), se observa una especie que duplica su población al cabo de cada semana. El experimento se realiza por 20 semanas. Al iniciar el experimento, se colocan 2 insectos en la caja de observación A y en la semana 5 se colocan 2 insectos en la caja de observación B.

Después de haber transcurrido 9 semanas desde el inicio del experimento, el científico decide repartir el total de los insectos de la caja A en charolas de trabajo, de manera que en cada una haya la misma cantidad de insectos que hay en la caja B.

a. ¿Cuántos insectos se colocarán en cada charola? ______

b. ¿Cuántos insectos habrá en cada charola 5 semanas después? ______

c. ¿Cuántos insectos habrá en cada charola 9 semanas después? ______

d. ¿Qué operación necesita realizar el científico para distribuir los insectos como lo decidió después de la semana 9? ______

- **Comenta con tus compañeros si tienen la información necesaria y si pueden responder las preguntas.**

Cocientes como fracciones

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Lee las instrucciones y haz lo que se pide.**

a. Escribe los términos del cociente $\frac{3^7}{3^3}$ como multiplicaciones repetidas.

Glosario

simplificar una fracción. Es encontrar una fracción equivalente dividiendo el numerador y el denominador por un mismo número.

b. Para **simplificar** el cociente, completa la operación:

$$\frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{3}{3} \times \frac{3}{3} \times \_ \times \_ \times \_ \times \_ \times \_$$

- ¿Qué operación de fracciones se usa en la simplificación anterior? Explica tu respuesta. ______

- ¿Cuál es el resultado de $\frac{3}{3}$? ___

c. Escribe el resultado del inciso *b* como una multiplicación de unos y una potencia de base 3.

d. ¿Qué relación encuentras entre las potencias del cociente original y la potencia del resultado? Explica tu respuesta. ___

e. Escribe una regla para dividir potencias con la misma base. Explica qué sucede con los exponentes. ___

- **Compara la regla que escribiste con las de dos compañeros, discutan las diferencias y concluyan cuál les parece más adecuada. Después compárenla con la siguiente información.**

Para obtener el **cociente de dos potencias** con la misma base, se pueden restar los exponentes de la siguiente manera.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, para $m > n$ y $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, para $n > m$ donde m y n son enteros.

Por ejemplo: $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$ y $\frac{6^4}{6^7} = \frac{1}{6^{7-4}} = \frac{1}{6^3}$

Practicar para avanzar

1. Rodea el resultado de cada cociente de potencias.

a. $\frac{5^6}{5^4}$	A) 5^2	B) $\frac{1}{5^2}$	C) 5
b. $\frac{9^2}{9^3}$	A) 9	B) $\frac{1}{9}$	C) 9^6

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenta tus dudas con tu profesor.

Lección 2 Exponentes negativos

1. Reúnete con un compañero, retoma el caso de los insectos de la lección anterior y hagan lo que se pide.

a. Respondan de nuevo los incisos *a*, *b* y *c*, considerando lo que aprendieron sobre el cociente de potencias.

b. ¿Qué operación necesita hacer el científico para distribuir los insectos como lo decidió después de la semana 9? Escríbanla. ______

- ¿Pueden resolver esa operación? Expliquen. ______

______

c. Simplifiquen el cociente como aprendieron en la lección anterior.

d. ¿Cuántas charolas de trabajo necesitará? ______

e. Escriban el cociente de potencias que represente el reparto del total de insectos de la caja B en charolas en las que haya la misma cantidad de insectos que en la caja A.

f. ¿Le es posible al científico hacer ese reparto? Justifiquen su respuesta. ______

______

- **Comparen su procedimiento y su respuesta con los de otras parejas y valídenlos con el profesor. Anoten en su cuaderno sus conclusiones.**

2. **Considera el cociente $\frac{4^7}{4^9}$ y haz lo que se pide.**

a. Utiliza la regla para obtener el cociente. ______

b. Escribe el cociente como multiplicaciones repetidas y simplifica, como en el ejercicio de la página 36.

c. Iguala los resultados que obtuviste. ______

- **Comparen sus respuestas en grupo. Si encuentran diferencias, coméntenlas con su profesor. Después lean la siguiente información y revisen de nuevo su trabajo.**

Los exponentes pueden ser positivos o negativos. Al elevar cualquier número *a* a un exponente negativo *n*, donde *n* es un número entero, se tienen los siguientes casos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Por ejemplo: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ y $\frac{1}{2^{-2}} = 2^2 = 4$

Cuando el exponente es 1, no es necesario escribirlo, es decir, a^1 se escribe solamente *a*.

Practicar para avanzar

1. Escribe las siguientes operaciones únicamente con exponentes positivos.

a. 3^{-4} ______

b. $\frac{1}{3^{-2}} =$ ______

2. Analiza los cocientes y contesta.

$\frac{7^{-4}}{7} =$ ______

$\frac{4}{2^{-1}} =$ ______

a. ¿En qué se diferencian estos cocientes y los que has simplificado anteriormente?

______

______

b. Simplifícalos de la manera que aprendiste en esta secuencia.

c. Escribe los cocientes utilizando solamente exponentes positivos.

Anota tus procedimientos en tu cuaderno y compara tus resultados con los de tus compañeros.

Lección 3

Cociente de potencias negativas y mixtas

1. **Analiza el siguiente cociente de potencias y responde.**

$$\frac{2^{-4}}{2^{-1}}$$

a. ¿Qué característica tiene con respecto a los cocientes vistos hasta ahora en la secuencia? ______________________________

b. Utilizando lo aprendido en la lección anterior sobre exponentes negativos, encuentra una expresión equivalente al cociente en la que se utilicen únicamente exponentes positivos. Anota tu procedimiento.

c. Simplifica el cociente de potencias.

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros. Si hubo diferencias, coméntenlas con ayuda del profesor.**

2. **Observa las siguientes potencias, simplifícalas al máximo y escríbelas utilizando únicamente exponentes positivos.**

a. $\frac{3^{-4}}{3^{-3}} =$

b. $\frac{1^{-2}}{1^{-8}} =$

c. $\frac{4}{2^{-2}} =$

d. $\frac{4^{-1}}{2^{-2}} =$

- **Anota el procedimiento y el resultado en tu cuaderno. Compara tu trabajo con el de tus compañeros.**

Herramientas académicas

Se pueden calcular potencias con calculadora. En algunas calculadoras se antepone la tecla "^" al exponente para calcular una potencia. Otras tienen la tecla "x^y", en la que se asignan en x y y los valores de la base y el exponente respectivamente. Es importante que sepas utilizar tu calculadora.

3. **Haz las operaciones. Luego valida tus resultados con la calculadora.**

$(9)^4 \times (9)^5 =$ __________ $(-5)^6 \times (-5)^3 =$ __________ $5^6 \times 5^1 =$ __________

4. **Reúnanse en equipos de 5 integrantes y hagan lo que se indica.**

a. Cada integrante del equipo debe diseñar 6 pares de tarjetas para un juego de memoria. En las tarjetas deberán escribir expresiones equivalentes del tipo:

$a^2 = a \times a$ $\quad 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$ $\quad 4^{-2} = \frac{1}{4 \times 4}$ $\quad 3^{-2} = \frac{1}{9}$

Para el diseño de las tarjetas deben considerar lo siguiente.

- Al menos 4 de los 6 pares deben incluir exponentes negativos.
- Al menos 4 tarjetas deben tener potencias.
- Al menos 4 tarjetas deben tener cocientes.
- Al menos 4 tarjetas deben tener una multiplicación repetida en el denominador.

b. Reúnanse con otro equipo y cada uno elija a dos representantes para jugar una partida con la memoria del equipo contrario. Si tienen alguna duda durante el juego, pidan ayuda a su profesor. Repitan lo anterior hasta que todos los integrantes de cada equipo hayan jugado.

- **Comenten en grupo y con su profesor qué características tienen los pares que les costaron más trabajo encontrar y por qué. Anoten en su cuaderno sus conclusiones, así como los pares de expresiones equivalentes que encontraron.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Resuelve el problema. Escribe todas tus operaciones en tu cuaderno y anota aquí las respuestas.**

En el inicio del curso, cada profesor de segundo grado de secundaria de una escuela recibió 5 cajas de cartón con 5 paquetes cada una. En cada paquete había 5 bolsas con 5 plumas rojas cada una. En dicha escuela hay 5 salones de segundo grado y en cada salón hay 5 casilleros de material.

a. Expresa como una potencia la cantidad de plumas rojas que hay. ____________

b. Expresa como una potencia la cantidad de casilleros que hay en total en los salones de segundo grado. ____________

c. ¿Qué operación debes resolver para saber cuántas plumas se guardarán en cada casillero? Justifica tu respuesta. ____________

____

____

d. Expresa como una potencia la cantidad de plumas rojas que corresponden a cada casillero. ____________

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros y revísenlos con ayuda del profesor. Corrige si lo consideras necesario.**

Secuencia didáctica

6

Números muy grandes y muy pequeños

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.

Lección 1

¿Qué es la notación científica?

PUNTO DE PARTIDA

1. **Analiza la información y contesta.**

La profesora de Matemáticas de Julián planteó los siguientes problemas en clase.

Problema 1. La distancia promedio de la Tierra al Sol es de 149 600 000 km y la distancia promedio de Marte al Sol es de 227 940 000 km. ¿Cuál sería la distancia de la Tierra a Marte si ambos planetas formaran una línea recta con el Sol?

Problema 2. El espesor de una hoja de papel es de 0.0008 m y el largo de una salmonela es de aproximadamente 0.000002 m. Ambas medidas son muy pequeñas, pero ¿cuál de las dos es mayor? ¿Cuántas salmonelas caben en el espesor de la hoja?

a. Lee los números que aparecen en cada problema. ¿Te resulta fácil leerlos? Explica por qué. ____________________

____

b. Resuelve los problemas que planteó la profesora y completa.
- La distancia promedio entre la Tierra y Marte es de ____________________
- En el espesor de una hoja de papel caben ____________________ salmonelas.

c. Escribe si te fue fácil o difícil resolver cada problema y por qué. ____________________

____

d. ¿Cómo puedes simplificar la manera de resolver estos problemas? ____________________

____

____

e. ¿Podrías utilizar potencias con exponente entero y base 10 para resolver los problemas? Explica. ____________________

____

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y resuelvan sus dudas con ayuda de su profesor.**

Representación de números en notación científica

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Reúnete con dos compañeros, lean el texto y respondan.**

Julián tuvo dificultades al resolver los problemas porque los números que aparecen son muy grandes o muy pequeños. Su profesora le sugirió que utilizara lo aprendido sobre potencias de 10 para escribir los números. Le puso como ejemplo que 149 600 000 se puede escribir como 1496×10^5, o mejor, como 1.496×10^8 y 0.000002 se puede escribir como 2×10^{-6}.

a. Escriban los números que aparecen en los problemas, como lo sugirió la profesora de Julián y justifiquen su respuesta. ____________

____

- ¿Son más fáciles de leer los números ahora? ¿Por qué? ________

____

____

- ¿Qué números representan 3.45×10^5 y 1.5×10^{-2}? ____________

____

- **Discutan sus respuestas con su profesor. Luego lean la siguiente información.**

Glosario

valor absoluto de un número. Es la distancia del número al cero en la recta numérica y se representa con dos barras. Por ejemplo: $|7| = 7$ y $|-7| = 7$.

Los científicos suelen operar con números muy grandes o muy pequeños. Para facilitar la comprensión de estos números, se usa **la notación científica**. En esta notación, los números se escriben como el producto $d \times 10^n$, en el que el **valor absoluto** de d es mayor o igual a 1 y menor a 10. Por ejemplo, $2\,300 = 2.3 \times 10^2$ y $0.023 = 2.3 \times 10^{-2}$.

En $d \times 10^n$, el número d se denomina **coeficiente**, el 10 es la **base** y la n es el **exponente** u **orden de magnitud** del número expresado en notación científica.

Practicar para avanzar

1. Escribe en notación estándar o común los números que están en notación científica; y en notación científica los que están en notación estándar o común.

   a. $473\,900\,000 =$ ____________ b. $5.987 \times 10^9 =$ ____________

   c. $-0.0002 =$ ____________ d. $348.32 \times 10^{-4} =$ ____________

2. Subraya el número que representa a 198.276 en notación científica.

   a. 19827.6×10^{-2} b. 198276×10^{-3} c. 1.98276×10^2

3. Responde en tu cuaderno los problemas y justifica tus respuestas.

   a. Los adultos utilizan en promedio las redes sociales durante 4.12×10^2 min al mes. Los jóvenes las utilizan en promedio 1.10×10^3 min al mes. ¿Quién utiliza menos tiempo las redes sociales?

   b. Una bacteria mide 4.7×10^{-5} m y un hongo mide 3.6×10^{-3} m. ¿Cuál de los dos es más grande?

   c. ¿Qué transistor es más pequeño: uno de 6×10^{-9} m o uno de 9×10^{-9} m?

Compara tus resultados con el resto del grupo y corrígelos si es necesario.

Lección 2

Operaciones con notación científica

1. **Reúnete con un compañero, lean el problema y sigan los pasos para resolverlo con notación científica.**

En una proyección poblacional se previó que para 2017 el estado de México contaría con 1.736×10^7 habitantes, Veracruz 8.163×10^6 habitantes y Chihuahua, 3.782×10^6. La entidad con menor población sería Colima con 7.35×10^5 habitantes.

Fuente: www.conapo.gob.mx/es/CONAPO/Proyecciones_Datos (consulta: 11 de septiembre de 2018)

- ¿Cuántos habitantes hay en total en Veracruz y Colima?
- ¿Cuál es la diferencia de habitantes entre el estado de México y Veracruz?
- ¿Cuál es la diferencia en población entre la entidad más poblada y la menos poblada?

Glosario

propiedad distributiva. Es aquella que indica que el resultado de una suma multiplicada por un número es igual al resultado de multiplicar cada sumando por dicho número y después sumar los productos. Es decir, $a(b + c) = ab + ac$.

a. Para responder la primera pregunta, escriban las dos cantidades de habitantes en términos de la misma potencia de 10. ______
- ¿Por qué creen que es necesario hacer esto? ______

______

b. Escriban la suma de estas dos cantidades utilizando la **propiedad distributiva**. ______

c. Calculen la suma de los dos números expresados en potencias de 10. ______

______

d. Escriban el número anterior en notación científica. ______

e. Comparen el resultado de seguir los pasos anteriores, pero escribiendo las dos cantidades en términos de la potencia de 10 que no utilizaron.
- ¿Qué encuentran? ______
- ¿Por qué sucede esto? ______

f. Respondan las otras preguntas siguiendo los pasos anteriores.
- Diferencia de habitantes entre el estado de México y Veracruz: ______

______
- Diferencia de población entre la entidad más poblada y la menos poblada:

______

- **Comenten sus respuestas con otra pareja de compañeros para validarlas.**

2. **Reúnete con dos compañeros y resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas. Utilicen potencias de 10 y notación científica.**

a. El costo de un anuncio de 20 segundos en la televisora A es de $121 472, mientras que en la televisora B es de $278 599.
- ¿Cuánto más caro sale el anuncio en la televisora B?
- ¿Se puede resolver el problema con notación científica? Justifica tu respuesta.
- ¿Simplifica el trabajo utilizar notación científica en este caso? ¿Por qué?

b. La distancia promedio de Marte al Sol es de 2.274×10^8 km y la de Saturno al Sol es de 1.429×10^9 km. **Fuente:** https://solarsystem.nasa.gov/planet-compare/
   - ¿Cuál es la distancia promedio entre Marte y Saturno?

- **Comenten sus respuestas con su profesor y concluyan en qué casos conviene utilizar la notación científica. Si es necesario, corrijan. Luego lean el texto.**

Para **sumar** o **restar** números expresados en notación científica es necesario expresar ambos números en términos de la misma potencia de diez, es decir, usando el mismo orden de magnitud. Esto permite utilizar la **propiedad distributiva** para sumar los coeficientes y multiplicarlos por el orden de magnitud elegido. Posteriormente la suma puede expresarse en **notación científica.** Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(7.5 \times 10^3) + (5.25 \times 10^5) &= 7.5 \times 10^3 + 525 \times 10^3 \\ &= (7.5 + 525) \times 10^3 = 532.5 \times 10^3\end{aligned}$$

3. Resuelve en tu cuaderno las siguientes operaciones.

a. $2.5 \times 10^5 + 3.8 \times 10^4 - 6.1 \times 10^3$ b. $9.5 \times 10^{-3} - 7.4 \times 10^{-2} + 5.1 \times 10^{-1}$

4. Reúnete con un compañero, discutan cómo resolverían los siguientes problemas y anoten sus ideas en su cuaderno. Luego hagan lo que se pide.

Problema 1. Los habitantes de un municipio quieren convertir un terreno de 1.45×10^3 m de largo y 2.58×10^2 m de ancho en un campo deportivo. ¿Cuál será su área?

Problema 2. Martha y Elvia necesitan encontrar la proporción entre el golfo de California y el golfo de México para justificar los recursos que requieren para hacer un proyecto. De acuerdo con la Organización Hidrográfica Internacional, el golfo de México tiene un área de 1.6×10^6 km^2 y encontraron que el golfo de California mide 177 000 km^2.

a. ¿Qué operación se requiere para resolver el problema 1? __________

b. Escriban la operación en el siguiente orden: primero los dos coeficientes de las longitudes y después las dos potencias de 10. __________
   - ¿Por qué es correcto escribir de esta manera la operación? __________

c. Encuentren el producto de los coeficientes. __________

d. Encuentren el producto de las potencias de 10. Usen lo que aprendieron sobre operaciones con potencias. __________

e. ¿Cuál es el área del campo deportivo expresada en notación científica?
____

f. Respondan en su cuaderno las mismas preguntas para el problema 2, usando cocientes en lugar de productos.

- **Comparen sus respuestas en grupo y coméntelas con su profesor.**

5. Lean la siguiente información y revisen su procedimiento. Si lo consideran necesario compleméntenlo.

Para **multiplicar** números expresados en notación científica, se multiplican por una parte los coeficientes, por otra las potencias de diez y se suman los exponentes. Después se escribe el resultado obtenido en términos de la **notación científica**.

Por ejemplo: $(8 \times 10^4) \times (3 \times 10^{-2}) = (8 \times 3) \times 10^{4+(-2)} = 24 \times 10^2$

Para **dividir** números expresados en notación científica, se dividen por una parte los coeficientes, por otra las potencias de diez y se restan los exponentes. Después se escribe el resultado en términos de la **notación científica**.

Por ejemplo: $\dfrac{6 \times 10^8}{2 \times 10^4} = \dfrac{6}{2} \times 10^{8-4} = 3 \times 10^4$

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. Resuelve los problemas utilizando notación científica.

a. Retoma el problema del espesor de la hoja de papel y la salmonela. Si la hoja de papel mide 0.0008 m de espesor y la salmonela mide 0.000002 m de largo, ¿cuántas salmonelas caben en el espesor de la hoja de papel?

b. La velocidad de la luz es 3×10^8 m/s. Marte está a una distancia promedio de 230 000 000 m del Sol.
- ¿Cuántos segundos tarda la luz del Sol en llegar a Marte?
- Si la Tierra está a una distancia promedio de 1.5×10^{11} de Marte, ¿cuánto tarda la luz en llegar de Marte a la Tierra?

c. Un cantante recibe en promedio 8 384 “me gusta” al día en una red social. ¿Cuántos recibe en un año?
- ¿Te fue útil calcular la respuesta con notación científica? ¿Por qué?

d. Cierta bacteria mide 1.5×10^{-6} m, mientras que el tamaño de una célula llamada *ovocito* es de 0.00015 m.
- ¿Cuál de las dos células es mayor?
- ¿Cuántas veces cabría la bacteria en un ovocito?

e. El tamaño de los transistores que se usan en los teléfonos celulares es de 1.5×10^{-8} m. Si suponemos que estos transistores son cuadrados, ¿cuántos cabrían alineados en un dispositivo de 2×10^{-3} m de largo?

2. Reúnete con un compañero y resuelvan en el cuaderno las operaciones usando potencias de 10.

a. $(4.2 \times 10^7) \times (1.54 \times 10^{-2}) \div (2 \times 10^6)$

b. $(3.2 \times 10^{-9}) \times (5.5 \times 10^{-2})$

c. $(7.9 \times 10^{-2}) - (1.2 \times 10^4) \div (8.7 \times 10^7)$

d. $(2.5 \times 10^{-5}) \div (5 \times 10^3)$

- **Comparen en grupo sus respuestas y comenten por qué es útil usar potencias de números enteros cuando se trabaja con números muy grandes o muy pequeños.**

Reviso mi trayecto

Resuelve los problemas. Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Toma nota de los contenidos que necesitas repasar.

1. **Una cuerda de $9\frac{9}{10}$ de m de largo se corta en pedazos del mismo largo que deben medir $1\frac{1}{15}$ de m.**

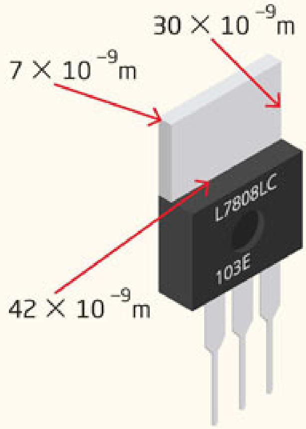
a. ¿En cuántos pedazos se cortó la cuerda? ____________________

b. ¿Cuántos metros de cuerda sobraron? ____________________

c. Si se hace lo mismo con 7 cuerdas del mismo tamaño, ¿cuántos pedazos se tendrán? ¿Cuánto sobrará? ____________________

____

2. **Un transistor es un elemento microscópico que se utiliza en computadoras y teléfonos celulares. En la figura de la derecha se observa uno de los componentes del transistor y sus dimensiones. Calcula el área de las tres caras y el volumen del componente.**



3. **Júpiter es el planeta más grande del sistema solar y tiene 1.899×10^{27} kg de masa. Un electrón es una de las partículas subatómicas más pequeñas y tiene una masa de 9.1×10^{-31} kg. ¿Qué tan grande es la masa de Júpiter con respecto a la del electrón?**

4. Resuelve los ejercicios:

a. $(8 \times 10^{6}) \times (8 \times 10^{3}) =$ ____________________

b. $(5.4 \times 10^{9}) \div (3.3 \times 10^{6}) =$ ____________________

Proporcionalidad directa e inversa

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Lección 1 Dos tipos de relaciones entre cantidades

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee el problema y responde las preguntas.

En una página de venta de música en internet se descargan canciones a una velocidad constante de 2.5 *megabytes* por segundo (MB/s), también a velocidad constante, utilizando el servidor A y a 1.2 MB/s utilizando el servidor B.

a. Si se quiere descargar un archivo de 4 MB, ¿en cuál de los dos servicios tarda menos en descargarse? ¿Por qué? ______________________________

____

b. ¿Descargar un archivo de 8 MB tardará más o menos que el de 4 MB? ¿Por qué?

____

____

____

c. ¿Qué sucede con el tiempo de descarga a medida que el tamaño del archivo aumenta? ______________________________

- ¿Y cuando el tamaño del archivo disminuye? ______________________________

d. ¿Qué sucede con el tiempo de descarga a medida que la velocidad aumenta?

____

____

- ¿Y cuando la velocidad disminuye? ______________________________

e. ¿Cómo puedes calcular el tiempo de descarga en cada servidor para distintos tamaños de archivos? ______________________________

____

____

f. ¿Cómo calcularías la velocidad a la que se descarga un archivo de 8 MB si supieras el tiempo de descarga? ______________________________

____

g. ¿Qué procedimiento utilizarías para calcular el tiempo de descarga en el servidor B de un archivo que tarda 10 segundos en descargarse en el servidor A?

____

____

____

____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y con tu profesor.**

Distintos tipos de proporcionalidad

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Lee nuevamente el problema anterior y haz lo que se pide.**

   a. Completa la tabla que muestra diferentes tamaños de archivos para descargar utilizando el servidor B.

Tamaño del archivo (MB)	Tiempo (s)
2	
4	
5.5	

   - ¿Son proporcionales el tamaño del archivo y el tiempo de descarga? ¿Por qué?

   b. Completa la tabla que relaciona los tiempos de descarga de un archivo de 4 MB al utilizar diversos servidores de internet con diferentes velocidades.

Velocidad (MB/s)	Tiempo (s)
1.2	
2.5	
5	

   - ¿Son proporcionales el tamaño del archivo y el tiempo de descarga? ¿Por qué?

   c. ¿Qué procedimientos utilizaste para completar las tablas?

- **Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de tus compañeros y, con ayuda de tu profesor, comenten en qué se parecen y en qué son diferentes las relaciones que muestran las dos tablas.**

Lección 2

Proporcionalidad inversa

1. **Observa las tablas de la lección anterior y responde.**

   a. Si el tamaño del archivo aumenta al doble, ¿qué sucede con el tiempo de descarga? ____________

   - ¿Y si el tamaño disminuye a la mitad? ____________

   b. Si la velocidad de descarga aumenta al doble, ¿qué sucede con el tiempo de descarga? ____________

   - ¿Y si la velocidad disminuye a la mitad? ____________

Las cantidades de dos conjuntos tienen una **relación inversamente proporcional** si al aumentar una cantidad en un conjunto *n* veces, la cantidad correspondiente disminuye *n* veces.

   c. ¿Cuál de las dos anteriores es una relación de proporcionalidad inversa? ¿Por qué? ____________

____

____

____

Anteriormente aprendiste que existe una **relación de proporcionalidad** cuando las cantidades de dos conjuntos se relacionan de modo tal que si una aumenta *n* veces, la cantidad correspondiente en el otro conjunto aumenta también *n* veces.

Para distinguirla de la relación de proporcionalidad inversa, esta relación se llama **relación de proporcionalidad directa**.

En la proporcionalidad directa, al dividir una cantidad de uno de los conjuntos entre su cantidad correspondiente, se obtiene siempre el mismo resultado, al que se le llama **constante de proporcionalidad**.

   d. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre el tamaño del archivo y el tiempo de descarga de la primera tabla? ____________

   e. ¿Es constante el número que resulta de dividir el tiempo de descarga entre la velocidad correspondiente de la segunda tabla? ____________

   f. Multiplica el tiempo de descarga por la velocidad correspondiente de cada renglón de la segunda tabla. Reúnete con un compañero y escriban en el cuaderno un párrafo que justifique lo que observan.

- **Comenta con tus compañeros cómo pueden distinguir entre proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa, y validen su conclusión con su profesor.**

Regla de tres inversa

2. **Lee la situación y responde.**

Dos personas pintan una barda en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en pintarla 4 personas, suponiendo que todas tardan el mismo tiempo en pintar la misma superficie?

- **Comenta con tus compañeros cómo resolviste el problema.**

Como observaste en las actividades anteriores, en una relación de proporcionalidad inversa, los productos entre las cantidades correspondientes de los dos conjuntos son constantes, así que se puede calcular un valor faltante igualando los productos.

Por ejemplo, si queremos encontrar cuánto tardarían en pintar esa misma barda 10 personas, podemos hacer lo siguiente:

2 personas × 6 horas = 10 personas × x horas

Despejando para encontrar el valor de x obtenemos:

$$x = \frac{2 \text{ personas} \times 6 \text{ horas}}{10 \text{ personas}}$$

A este procedimiento, que involucra dos parejas de cantidades, se le conoce como **regla de tres inversa** y se utiliza en situaciones en que las variables se relacionan de manera inversamente proporcional.

- Resuelve la operación anterior para encontrar el tiempo que tardan en pintar la barda las 10 personas. ¿Cuántas horas y minutos son? ______________________

Practicar para avanzar

Resuelve el problema con base en lo que sabes de proporcionalidad inversa. Haz los cálculos en tu cuaderno.

En una pensión de perros utilizan un alimento que viene en dos presentaciones: saco y costal. El saco alcanza para alimentar a 20 perros durante 3 días, mientras que el costal alcanza para 5 días. ¿Para cuántos días alcanzan dos sacos si ahora hay 30 perros en la pensión? ¿Y dos costales? ¿Y si se tuvieran dos sacos y dos costales? ¿Cuántos días duraría el alimento si hubiera 20 perros? ¿Y 30?

Lección 3

Proporcionalidad directa e inversa

1. **Lee el problema y haz lo que se pide.**

Tomás tarda hora y media en ir de su casa a su escuela en bicicleta a una velocidad promedio de 20 km/h. ¿Cuánto tardaría en realizar ese mismo recorrido si viajara a 40 km/h en motocicleta? ¿Cuánto tardaría en un automóvil a 80 km/h?

a. Resuelve el problema y completa la tabla.

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
20	

b. Calcula el tiempo que tardaría Tomás en recorrer 50 km en bicicleta, motocicleta y automóvil respectivamente.

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
20	

- ¿Qué procedimientos utilizaste para encontrar las respuestas?

____

____

- ¿Puedes encontrar las respuestas de otra manera? ¿Explica cómo?

____

____

- ¿Qué cantidades se relacionan de manera directamente proporcional?

____

- ¿Qué cantidades se relacionan por medio de una proporcionalidad inversa?

____

- ¿De qué manera se puede utilizar la regla de tres para resolver este problema?

____

____

- ¿De qué manera se puede utilizar la regla de tres inversa?______________

____

____

- **Comenta con tus compañeros y con tu maestro cómo se puede reconocer cuándo se debe utilizar la regla de tres inversa y cuándo la regla de tres.**

Aplica lo que aprendiste.

1. **Resuelve los problemas.**

PUNTO DE LLEGADA

a. En una autopista, la distancia entre un poste de luz y otro es de 35 m y se sabe que en determinado tramo hay 15 postes. ¿Cuántos postes habría en ese mismo tramo si la distancia entre uno y otro fuera de 20 m? ¿Y si la distancia fuera de 10 m?

Distancia entre postes (m)			
Número de postes por tramo	15		

- Completa la tabla considerando que el tramo es de 1 km.

Distancia entre postes (m)	10	20	35
Número de postes por tramo			

- ¿Qué cantidades se relacionan de manera directamente proporcional en este problema? ______
- ¿Cuáles mantienen una relación inversa de proporcionalidad?

______

b. Una película se descarga de internet a una velocidad de 2 MB/s utilizando el servidor C y a una velocidad de 1.5 MB/s utilizando el servidor D.

- Si la película se descarga en 30 minutos utilizando el servidor C, ¿cuánto tarda utilizando el servidor D? ______
- Si se utilizara un servidor E con una velocidad 3 MB/s, ¿cuánto tardaría en descargarse la película? ______
- ¿Qué cantidades se relacionan de manera directamente proporcional?

______

______

- ¿Qué cantidades mantienen una relación de proporcionalidad inversa?

______

2. **Reúnete con un compañero y haz lo que se pide.**

a. Inventen un problema en el que las cantidades se relacionen de manera directamente proporcional y otro en el que las cantidades mantengan una relación inversamente proporcional.

b. Intercambien problemas con otra pareja del salón, analicen si representan situaciones de proporcionalidad y resuélvanlos.

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Luego explica en tu cuaderno la diferencia entre proporcionalidad inversa y proporcionalidad directa. Valida tu texto con tu profesor.**

Sucesiones lineales

Aprendizaje esperado: Verificarás algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Lección 1

Representaciones algebraicas de sucesiones

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee el problema y responde.

Tatiana usó cubos para formar figuras siguiendo patrones.

Diseño 1

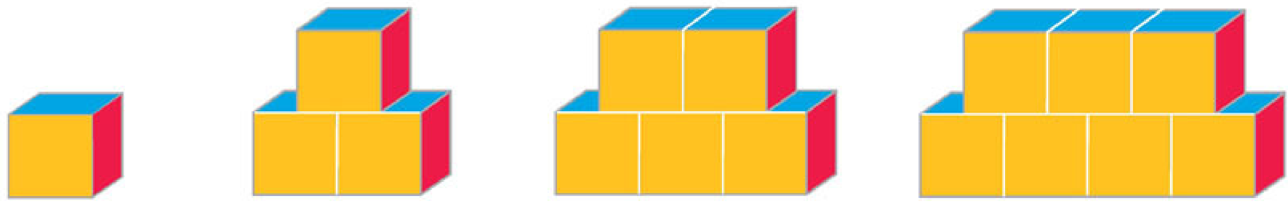


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a. Dibuja las dos figuras que continúan la secuencia.

b. Anota en la tabla el número de cubos que tiene cada figura.

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6

- ¿Qué patrón observas en los números de la tabla? ______
- ¿Cuántos cubos necesitarías para dibujar la figura número 150? Justifica tu respuesta. ______
- Tatiana dice que la expresión para el número de cubos que habrá en la figura n es $n + n - 1$, mientras que Joaquín, su hermano, dice que es $2n - 1$. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué? ______
- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y explica tu procedimiento.**

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

Diferentes formas de ver las sucesiones

1. **Revisa las expresiones algebraicas que escribieron Joaquín y Tatiana y realiza lo que se pide.**

TRAYECTO FORMATIVO

a. Completa la tabla para comprobar que las expresiones sean correctas. Verifica que en cada caso se obtenga el número de cubos de las figuras.

Expresión	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
$n + n - 1$					
$2n - 1$					

b. Tatiana le explicó a Joaquín que, para obtener la fórmula, ella vio la sucesión de figuras así:

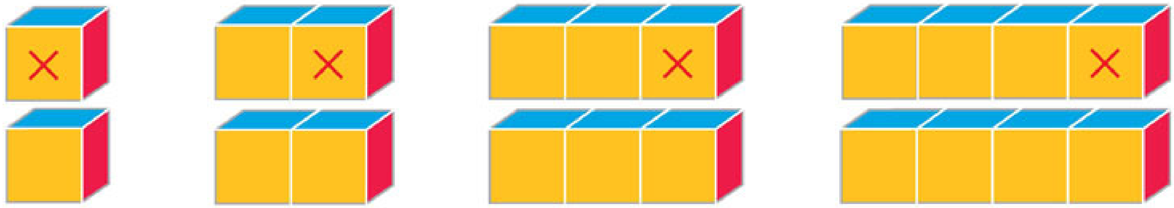


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

c. Joaquín, por su parte, le explicó a Tatiana que él vio las figuras así:

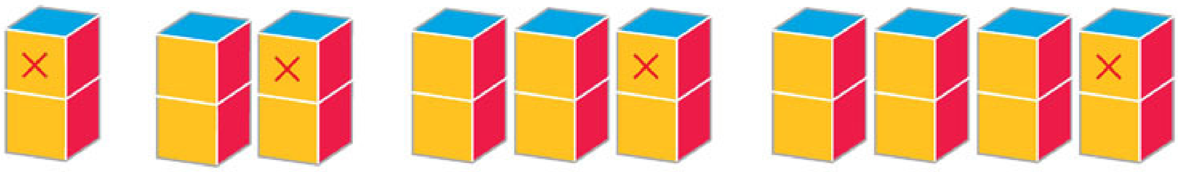


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

d. Comenta con un compañero qué relación hay entre las fórmulas que escribieron Tatiana y Joaquín y su forma de ver las figuras. Anoten sus conclusiones. ______

______

______

Una sucesión puede representarse mediante diferentes expresiones algebraicas. Estas expresiones se denominan **expresiones equivalentes**.

Para asegurar que dos expresiones son equivalentes, se pueden efectuar operaciones algebraicas de manera que se obtenga una expresión a partir de la otra. Por ejemplo, en $n + n - 1$ se puede sumar $n + n$ y así obtener $2n - 1$.

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y comparte con ellos qué diferencia hay entre las expresiones de Tatiana y Joaquín.**

Lección 2

Expresiones algebraicas equivalentes I

1. **Observa la sucesión, dibuja en tu cuaderno los siguientes tres términos y realiza lo que se te pide.**

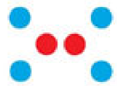


Figura 1

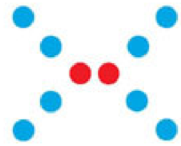


Figura 2

a. Completa la tabla con el número de círculos de cada figura.

Figura	1	2	3	4	5
Círculos rojos					
Círculos azules					
Total de círculos					

b. Escribe una expresión algebraica que te permita encontrar el número total de círculos.

Total de círculos: ___________________

c. Verifica que la expresión que escribiste es correcta sustituyendo valores y comparando con el número de círculos en cada figura.

d. Escribe al menos dos expresiones equivalentes para la sucesión. ____________

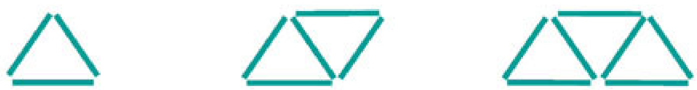
____

e. Dibuja en tu cuaderno cómo se ve la sucesión de acuerdo con cada expresión. Puedes agrupar los círculos o separarlos, según sea el caso.

- **Compara tus expresiones con las de un compañero y analicen juntos si son equivalentes. Realicen operaciones algebraicas para comprobarlo.**

Practicar para avanzar

1. Observa las figuras y encuentra al menos dos expresiones algebraicas equivalentes para representar el número de barras necesarias para formar la figura número *n*.



Expresión 1. ___________________ Expresión 2. ___________________

2. Dibuja en tu cuaderno una sucesión que corresponda a las expresiones $3n + 3$ y $3(n+1)$. Puedes agrupar o separar los elementos de cada figura para indicar cómo se ve la sucesión de acuerdo con cada expresión.

Expresiones de sucesiones numéricas

2. Reúnete con un compañero, analicen la sucesión y respondan.

Lugar del término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Término	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196

a. Verifica en tu cuaderno si las expresiones corresponden a la sucesión.

$$20n - 4 \qquad\qquad 4(5n-1)$$

b. Lee las observaciones respecto a la sucesión y decide qué expresión corresponde a cada una.

- Va de 20 en 20. ____________________
- En todos los casos el número es un múltiplo de 4. ____________

c. ¿Son equivalentes las expresiones? ¿Por qué? ____________________

____

____

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. Observa la sucesión y responde.

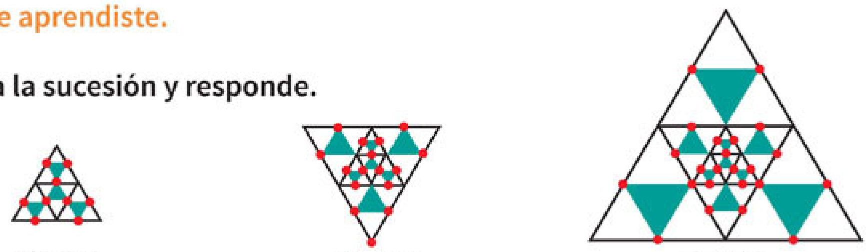


Figura 1 — Figura 2 — Figura 3

a. Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes que describan la sucesión del número de puntos rojos en las figuras. ____________________

b. Escribe dos expresiones algebraicas que indiquen el número de triángulos verdes que hay en cada figura. ____________________

c. ¿Cuántos puntos rojos y triángulos verdes tendrá la figura 1 000? Usa ambas expresiones para obtener el resultado y verificar que sea el mismo. __________

____

____

2. Completa la tabla y responde.

Lugar del término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Término	6	8	10	12	14	16				

a. Escribe dos expresiones algebraicas que representen la sucesión y utilízalas para encontrar el término 100 de la sucesión. ____________________

- **Comenten en grupo cómo pueden saber si dos expresiones algebraicas corresponden a una misma sucesión.**

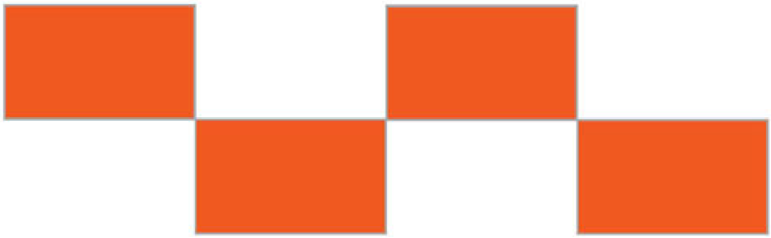
Perímetros de figuras

Aprendizaje esperado: Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

Lección 1 Diferentes procedimientos para calcular el perímetro

PUNTO DE PARTIDA

1. Observa la figura y responde.



a. Obtén el perímetro de la figura anterior. Considera que el largo de cada rectángulo mide 5 unidades y la altura, 3 unidades. ______________________

b. Escribe dos procedimientos distintos para calcular el perímetro de la figura.

Procedimiento 1 ____

____

____

____

Procedimiento 2 ____

____

____

____

c. Si el largo de cada rectángulo mide *b* y su altura mide *h*, subraya las expresiones que representan el perímetro de la figura.

- $4(b + h)$
- $8(b + h)$
- $8b + 4h$
- $8b + 8h$
- $4(2b + 2h)$

d. ¿A qué expresión o expresiones corresponde cada procedimiento que escribiste en el inciso *b*? Completa la tabla.

Procedimiento	Expresión
Procedimiento 1	
Procedimiento 2	

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros. Comparen sus resultados y valídenlos con ayuda del profesor. Corrijan si es necesario.**

Diferentes formas de representar el perímetro de una figura

1. Revisen en parejas la figura de la actividad anterior y las expresiones que representan su perímetro.

TRAYECTO FORMATIVO

a. Completen la tabla para verificar si al utilizar las expresiones que eligieron se obtiene el mismo perímetro. Utilicen las medidas que se indican.

Expresión	Base = 3 cm Altura = 1.5 cm
	P =
	P =

El perímetro de una figura puede representarse mediante diferentes expresiones algebraicas **equivalentes**.

Cuando se tienen dos expresiones equivalentes para el perímetro, es posible obtener una a partir de la otra utilizando operaciones algebraicas. Por ejemplo, si el perímetro de una figura es $3a + 2b + 3a + 5b$, se puede simplificar para obtener $6a + 7b$.

- **Con base en la información anterior, comenten con otra pareja si las expresiones que eligieron para el perímetro de la figura son equivalentes y por qué.**

Practicar para avanzar

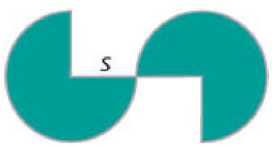
1. Encuentra dos procedimientos distintos para representar el perímetro de la figura.

Procedimiento 1: ______________________________

____

Procedimiento 2: ______________________________

____



2. Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes y determina a qué procedimiento corresponde cada una.

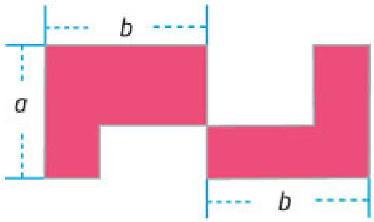
Expresión 1: ______________________________

Expresión 2: ______________________________

Lección 2

Expresiones algebraicas equivalentes II

1. **Observa la figura y responde.**



a. Explica por qué $4a + 4b$ representa el perímetro de la figura. ______________

____

____

b. Escribe tres expresiones algebraicas equivalentes que represente el perímetro de la figura.

- ______________
- ______________
- ______________

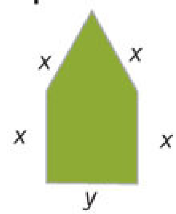
c. Verifica que las expresiones anteriores sean correctas. Sustituye $a = 5$ y $b = 6$. Compara el perímetro que se obtiene con las diferentes expresiones.

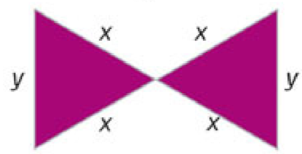
d. Comprueba, algebraicamente, que las expresiones son equivalentes.

2. **Une con una línea las expresiones algebraicas equivalentes. Después determina cuáles corresponden al perímetro de las figuras.**

- $x + x + y$
- $x + x + x + x + y + y$
- $x + x + x + x + y$
- $2y + 4x$

- $x^2 + x^2 + y$
- $4x + y$
- $y + y + 4x$
- $3x + y + y$

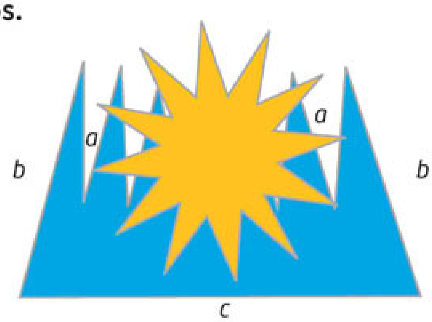




- **Compara tus resultados con los de tus compañeros. Si tienen dudas, resuélvanlas con el apoyo del profesor.**

Expresiones de perímetros

3. **Respondan en equipos.**



La figura amarilla cubre un número incierto de lados de tamaño a de la figura azul.

a. Escriban dos expresiones algebraicas que representen el perímetro de la figura azul. ______

b. Definan la longitud de los lados de la figura amarilla y escriban dos expresiones algebraicas para su perímetro.

- ______ • ______

- **Comenten en grupo sus respuestas. ¿Obtuvieron expresiones equivalentes?**

Aplica lo que aprendiste.

1. **Dibuja dos figuras diferentes con lados a y b, y cuyo perímetro sea $2a + 4b$.**

PUNTO DE LLEGADA

a. Encuentra dos expresiones equivalentes para el perímetro de tus figuras.

- ______ • ______

b. Pide a un compañero que represente el perímetro de tus figuras. ¿Sus expresiones son correctas? ¿Son equivalentes a las tuyas? ¿Cómo lo sabes? ______

______

- **Comenten en grupo, con la orientación del profesor, cómo pueden saber si dos expresiones algebraicas corresponden al perímetro de una misma figura.**

Secuencia didáctica

10

Sistemas de ecuaciones lineales

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Lección 1

Sistemas de ecuaciones

PUNTO DE PARTIDA

1. **Reúnete con un compañero y resuelvan.**

En una tienda hay dos máquinas para jugar videojuegos. En una, "Batalla de titanes" y en la otra, "Salva a Lucas". Cada juego de "Batalla de titanes" cuesta \$25 y cada juego de "Salva a Lucas", \$50. Francisco ha ahorrado \$200 y quiere usarlos en los juegos, pero solamente tiene tiempo para seis. ¿Cuántos juegos de cada tipo puede jugar si quiere emplear todo lo que tiene ahorrado?

a. ¿Cuántas incógnitas tiene el problema? ¿Cuáles son? ____________

b. Intenten encontrar la solución dando valores a las incógnitas. ¿Qué tan eficiente es esta forma de resolver el problema? ____________

c. Elijan una letra para representar cada incógnita y escriban qué significa cada letra. ____________

d. ¿Cuántas ecuaciones pueden escribir con los datos del problema? ____________
   - ¿Cuántas incógnitas aparecen en cada ecuación? ____________

e. Encuentren una solución para la primera ecuación. ____________
   - ¿Satisface esa solución la otra ecuación? ____________

f. ¿Cualquier solución de la primera ecuación será solución de la segunda? Justifica tu respuesta. ____________

g. ¿Cómo pueden responder las preguntas del problema? ____________

- **Comparen sus respuestas con las de otros dos equipos y valídenlas.**

El problema en términos matemáticos

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Retomen el problema de la actividad anterior y respondan en su cuaderno.**

a. La primera parte del problema se refiere a la cantidad de videojuegos y afirma que hay dos distintos. Además, se sabe que Francisco tiene tiempo para jugar seis videojuegos.
   - Con las letras que eligieron en el inciso *c* , escriban una ecuación que represente esta situación.

b. La segunda parte del problema se refiere al costo de cada juego. Afirma que cada juego de "Batalla de titanes" cuesta \$25 y cada juego de "Salva a Lucas", \$50. También se indica que Francisco tiene \$200 para jugar.

- ¿Cuánto gastará Francisco si juega un juego de "Batalla de titanes" y dos de "Salva a Lucas"? ¿Le alcanza para jugar más? ¿Por qué?
- Con las letras que eligieron, representen cuánto gastará Francisco en total por jugar ambos videojuegos las veces que elija.
- El costo total de jugar cada videojuego cierto número de veces debe ser \$200. Entonces la ecuación en términos matemáticos se escribe como:

- **El problema anterior se puede representar con dos ecuaciones. Comenten en grupo cómo creen que se pueden encontrar esas incógnitas.**

2. Trabajen en grupo con su profesor. Sigan las instrucciones de la actividad anterior y representen matemáticamente el siguiente problema en su cuaderno.

Francisco regresa a la tienda y encuentra que ahora hay tres máquinas de videojuegos diferentes. "Carrera en el espacio" cuesta \$20 y tiene un letrero que indica que, por cada juego de "Carrera en el espacio", es necesario jugar dos veces "Batalla de titanes". Francisco quiere jugar 10 juegos y ahora tiene \$260 para gastar. ¿Cuántos juegos de cada tipo puede jugar ahora Francisco?

- **Comenten si el problema anterior se puede resolver con una o con dos ecuaciones y por qué. Después analicen la siguiente información.**

Al conjunto de dos o más ecuaciones lineales con dos o más variables que representan las **incógnitas** de un problema se le llama **sistema de ecuaciones lineales**. Un sistema de ecuaciones puede tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, más ecuaciones que incógnitas o más incógnitas que ecuaciones.

En esta secuencia nos concentraremos únicamente en sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Practicar para avanzar

Representa matemáticamente en tu cuaderno la siguiente situación y contesta.

1. En una tienda de dulces venden dos tipos de chocolates. Cada gramo de pasas con chocolate cuesta \$0.80 y cada gramo de lunetas, \$0.40. Los chocolates pueden comprarse de manera combinada. Un cliente desea una mezcla de 50 g de chocolates que cueste \$0.64 por gramo.

   a. ¿Cuántos gramos de cada tipo de chocolate tiene esa mezcla? ________________

   b. ¿Cuántas ecuaciones y cuántas incógnitas tiene el sistema que representa al problema?

   ____

Lección 2

Para solucionar sistemas de ecuaciones

1. **Reúnete con dos compañeros y revisen el primer problema de la lección anterior.**

   a. Escriban el sistema de ecuaciones lineales que propusieron. ______________

   ____

   - Busquen dos valores, uno para cada incógnita, que satisfagan la ecuación y anótenlos. ______________
   - Sustituyan estos números en la segunda ecuación. ¿Se satisface la igualdad?

     ____
   - Si la igualdad se satisface, esta pareja de números corresponde a una solución del sistema. Si no, intenten con otros dos números hasta que se satisfagan ambas ecuaciones. Este procedimiento se conoce como ensayo y error.
   - ¿Qué números cumplieron con ambas igualdades? ______________

   b. ¿Con qué otra estrategia se puede resolver el sistema de ecuaciones? Úsenla para tratar de encontrar una solución del sistema.

   - ¿Están seguros de que la pareja de números que encontraron es solución del sistema de ecuaciones? ¿Por qué? ______________

     ____
   - ¿La pareja de números que encontraron es la única solución posible del sistema de ecuaciones? Justifiquen su respuesta. ______________

     ____

   - **Comparen su estrategia y su solución con las de otros equipos y discútanlas en grupo y con su profesor. Concluyan si hay más de una solución o no.**

2. **Analiza la siguiente información y contesta en tu cuaderno.**

En ocasiones conviene utilizar una forma ordenada de **buscar** por **ensayo y error** la **solución de un sistema de ecuaciones**. El sistema de ecuaciones que representa el problema de Francisco, utilizando la variable x para el número de veces que Francisco jugó “Batalla de titanes” y la variable y para el número de veces que jugó “Salva a Lucas” es:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 25x + 50y = 200 \end{cases}$$

   a. Sigue el procedimiento dado y haz lo que se indica.

   - Traza una tabla de tres columnas. En la primera columna escribe una lista de posibles valores para la variable x: por ejemplo, del 0 al 6. En la segunda columna escribe el valor de y que habría que sumar a x para obtener como resultado 6.
   - En la tercera columna escribe, para cada pareja de números, la suma $25x + 50y$ y compara con 200 el valor de la suma.

b. ¿Cuál pareja de números x y y satisface la igualdad cuando se sustituyen en la segunda ecuación? ¿Satisfacen también la primera ecuación? ____________

____

c. ¿Alguna otra pareja de números satisface las dos ecuaciones? ____________

d. ¿Puedes asegurar que la solución que encontraste es la única del sistema de ecuaciones? ¿Por qué? ____________

____

____

____

- **Sigue el mismo procedimiento para encontrar las posibles soluciones de los problemas de la lección anterior. Revisa tus respuestas con un compañero.**

> **Resolver** un sistema de ecuaciones lineales significa encontrar el o los valores de cada **incógnita.** Una solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores que **satisfacen todas las ecuaciones a la vez** o simultáneamente. Los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener una **solución única**, un **conjunto** con un **número infinito de soluciones** o **no tener solución.**

Aplica lo que aprendiste y responde.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Reúnete con dos compañeros. Resuelvan los sistemas de ecuaciones lineales por ensayo y error. Luego contesten las preguntas en su cuaderno.**

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 15 \\ -6x + 4y = -30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 4x + 12y = 16 \end{cases}$$

a. ¿Cuántas posibles soluciones encontraron? ¿Fue fácil o difícil hallarlas?
b. ¿Puede haber otras soluciones? ¿Por qué?
c. ¿Pueden asegurar que estos sistemas tienen únicamente las soluciones que hallaron?

2. **Inventa un problema que se resuelva con un sistema de ecuaciones. Resuélvelo y pide a un compañero que lo resuelva también. ¿Encontraron la misma solución o las mismas soluciones?**

3. **Resuelve el siguiente problema.**

Una tienda vende mermeladas de fresa y de chabacano. En la tienda hay 24 frascos más de fresa que de chabacano, de un total de 98. ¿Cuántos frascos de cada tipo de mermelada hay en la tienda?

- **Comparen sus respuestas y sus estrategias. Comenten qué tan fácil es resolver un sistema de ecuaciones lineales como el de la secuencia y qué tan eficiente es hacerlo por ensayo y error.**

Secuencia didáctica

11

Representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Lección 1

Gráficas de ecuaciones lineales

PUNTO DE PARTIDA

1. Reúnete con un compañero, lean el problema y contesten.

Marcela está planeando hacer un viaje con sus papás a una ciudad turística de un estado vecino y a la playa. En internet encontró que el precio del hotel en la ciudad era de $275 por noche y que el precio del hotel en la playa era de $400 por noche. Marcela y sus papás planean pasar una semana de vacaciones (7 noches) y tienen un presupuesto de $2 300 para el hospedaje, que deben gastarse completamente.

a. ¿Qué necesita saber Marcela para planear su viaje? ______________________

____

b. Usen las letras *c* y *p* para representar el número de noches que la familia se hospedará en el hotel de la ciudad y en el hotel de la playa, respectivamente.

- Escriban una expresión que describa el costo del hospedaje en la ciudad. ____

____

- Y una para el costo en la playa. ______________________
- Escriban una expresión que describa la condición del costo total del hospedaje.

____

c. Con las mismas variables, escriban una expresión que describa la condición que debe cumplirse para la duración de las vacaciones. ______________

d. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa el problema? ______________

____

e. Encuentren la solución del sistema por el método de ensayo y error. __________

____

- **Verifiquen la solución que encontraron. Luego comparen y discutan sus respuestas con las de otras parejas.**

Sistemas de ecuaciones y gráfica de rectas

TRAYECTO FORMATIVO

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se pide.

a. Retomen la expresión que describe el número de días que la familia de Marcela pasará en cada hotel. Indiquen con una ✔ las parejas de valores que satisfagan la igualdad y que sean solución del problema.

- $c = 1, p = 6$ ☐
- $c = \frac{3}{4}, p = \frac{25}{4}$ ☐
- $c = 3.5, p = 3.5$ ☐
- $c = \frac{2}{3}, p = \frac{4}{4}$ ☐

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Ecuaciones

b. ¿Pueden resolver la expresión con los métodos que aprendieron para resolver ecuaciones lineales? Justifiquen su respuesta. ______________________

____

c. Resten *c* de los dos lados de la ecuación. ¿Qué representa esa expresión? ______

____

d. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente? ______________

____

e. Obtengan puntos con coordenadas (c, p) que cumplan con la igualdad y ubíquenlos en un plano cartesiano en su cuaderno. Unan los puntos para formar una gráfica que represente la expresión.

f. Obtengan puntos que cumplan con la ecuación para el costo del hospedaje y dibujen la gráfica que represente la expresión en el plano anterior.

g. Analicen la gráfica y respondan en su cuaderno.

- Si la familia se quedara 2 días en la ciudad y 5 en la playa, ¿gastaría todo su presupuesto?
- ¿Qué pasaría si se quedaran 3 días en la playa y 8 en la ciudad? ¿Es esto posible con las condiciones del problema? Justifiquen su respuesta.
- ¿Qué punto de la gráfica indica el número de días que estarán en cada hotel si gastan todo el presupuesto?
- Escriban la solución del problema como pareja ordenada y expliquen lo que indica cada coordenada.

- **Verifiquen su trabajo con el maestro y analicen la siguiente información.**

Cada expresión de un sistema de ecuaciones, representa una **función lineal** cuya gráfica es una **recta. Todos** los puntos sobre esa recta satisfacen la ecuación. Como la **solución** del sistema de ecuaciones debe satisfacer **ambas** ecuaciones, en el **método gráfico** la **solución** o soluciones del sistema son los **puntos que se encuentran en ambas rectas**. Si las rectas no se cruzan, **no hay solución.** Al usar este método es importante hacer las gráficas con precisión para encontrar la solución.

Practicar para avanzar

1. Resuelve cada sistema de ecuaciones por el método gráfico. y posteriormente encuentra la o las soluciones del sistema. Para verificar que tus respuestas son correctas, sustituye la pareja ordenada en las ecuaciones.

a. $2x - 3y = -2$
$4x + y = 24$

b. $14x - 4.5y = -4.5$
$3.5x - y = -0.25$

c. $-8x + 4y = 4$
$24x - 12y = -12$

Comenten qué características tienen las rectas que representan a las ecuaciones de estos sistemas, cuál es la pendiente de cada una y cómo se comparan.

Contenido: Empleas el método gráfico para analizar cuándo un sistema tiene una solución, infinidad de soluciones o no tiene solución. Resuelves sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método gráfico.

Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

1. **Reúnete con un compañero y resuelvan el problema.**

Una compañía de teléfonos ofrece los siguientes planes de pago.

Plan I: $295 al mes más $10 por llamada.
Plan II: $860 al mes y llamadas gratis.
Plan III: $550 al mes más $5 por llamada.

En todos los casos se puede hacer el número de llamadas que se desee. ¿Cómo pueden elegir el plan más conveniente? Para ello...

a. Escriban las ecuaciones que corresponden a cada plan. Representen el número de llamadas al mes con la variable *t* y la cantidad mensual por pagar con la variable *y*.

- Plan I: __________
- Plan II: __________
- Plan III: __________

b. ¿De qué depende cuál plan conviene más? __________

c. Escriban el sistema de ecuaciones que representa el costo de los tres planes y el número de llamadas. __________

- ¿Cuántas incógnitas y cuántas ecuaciones tiene el sistema? __________

d. Construyan en su cuaderno la gráfica que representa los costos de los tres planes en el mismo sistema coordenado. Puedes apoyarte en un programa como GeoGebra para obtener las gráficas.

e. Analicen la gráfica. ¿Cuál es la solución del sistema? __________

f. ¿Qué significa la solución en términos del problema? __________

2. **Sigue trabajando con el mismo compañero. Usen el método gráfico para responder en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.**

a. ¿Cuántas llamadas deben hacer para que el plan I y el plan II cuesten lo mismo? ¿Y para que el plan I y el plan III cuesten lo mismo?

b. ¿Cuántas llamadas deben hacer para que el plan II y el plan III cuesten lo mismo?

c. Si Joaquín hace alrededor de 15 llamadas al mes, Lucero hace 50 llamadas al mes, Nayeli hace 60 llamadas al mes y Pedro hace 70 llamadas al mes, ¿cuál plan le conviene a cada uno?

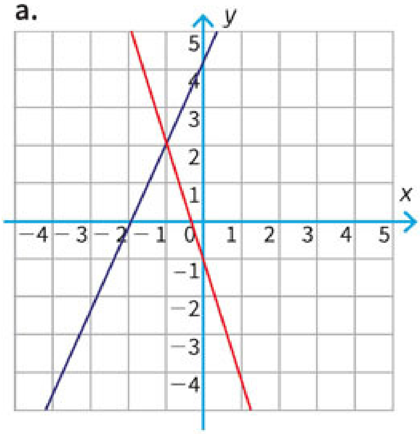
- **Verifiquen sus respuestas con otros equipos y con su profesor y lleguen a conclusiones sobre los planes de pago.**

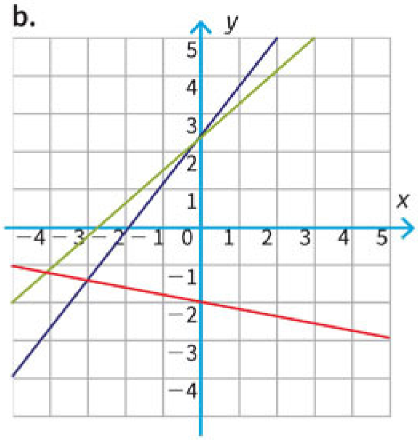
Los **sistemas de ecuaciones** pueden tener distintos números de ecuaciones y de incógnitas. En todos los casos, el **conjunto solución** del sistema es el conjunto de parejas ordenadas que satisfacen todas las ecuaciones. Cuando no hay solución para el sistema, **la solución es el conjunto vacío**, ∅. Cuando todos los puntos de una ecuación coinciden con otra, el conjunto solución se denota por **una de las ecuaciones** del sistema.
Por ejemplo, en la actividad anterior la solución del sistema es el conjunto vacío, ya que las tres rectas no se cruzan en un mismo punto.

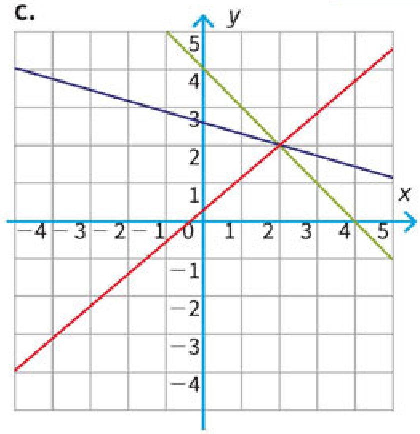
Aplica lo que aprendiste.

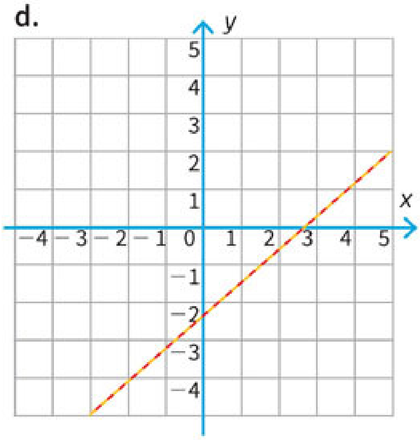
PUNTO DE LLEGADA

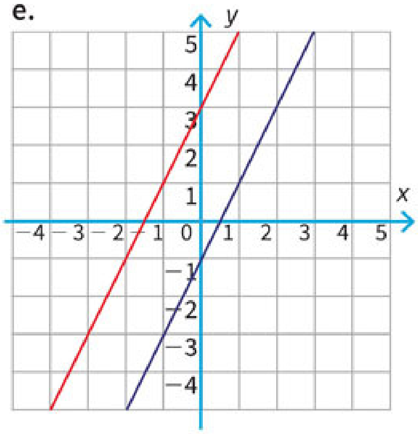
1. **Escribe en tu cuaderno cuántas ecuaciones y cuántos sistemas hay en cada gráfica y cuál es el conjunto solución.**

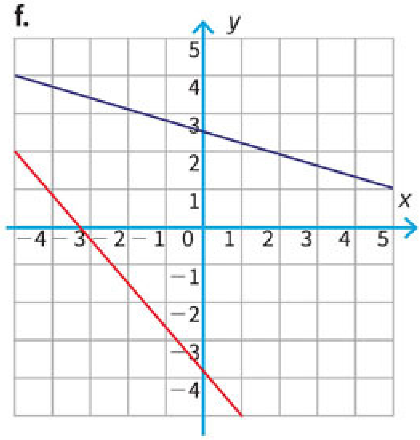
a.


b.


c.


d.


e.


f.


2. **Responde en tu cuaderno.**

   a. Si tienes un sistema de 3 ecuaciones y dos incógnitas, ¿cómo deben ser las rectas que representan a las ecuaciones del sistema para que tenga solución?
   b. Escribe el conjunto solución de cada sistema que resolviste en la secuencia. Justifica tus respuestas.

- **Compara tus respuestas y procedimientos con los de un compañero. Si tienen dudas, consulten a su profesor.**

Contenido: Empleas el método gráfico para analizar cuándo un sistema tiene una solución, infinidad de soluciones o no tiene solución. Resuelves sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método gráfico.

Resolución de un sistema de ecuaciones por el método gráfico

Reúnete con un compañero y sigan los pasos para resolver el siguiente sistema de ecuaciones con una hoja electrónica de cálculo.

$$2x - 3y = -2$$
$$4x + y = 24$$

1. Despejen la variable *y* de ambas ecuaciones. Las ecuaciones quedan como:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$
$$y = -\ 4x$$

2. En una hoja electrónica de cálculo escriban los títulos para crear una tabla como se muestra en la imagen 1.

	A	B	C
1	x	y = (2/3) x + 2/3	y = -4x + 24
2			
3			
4			
5			
6			

Imagen 1

3. En la columna de la variable *x*, escriban los números del 0 al 15. Para esto, pueden ingresar el valor 0 en la celda A2, escribir la fórmula "=A2+1" en la celda A3 y después copiar la celda A3 hacia abajo.

	A	B	C
1	x	y = (2/3) x + 2/3	y = -4x + 24
2	0	= (2/3)*A2+2/3	=-4*A2+24
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Imagen 2

4. En las celdas B2 y C2, anoten las fórmulas que escribieron en el encabezado, quitando la *y* y sustituyendo la variable *x* por la celda A2. Utilicen un asterisco para denotar la multiplicación, como se muestra en la imagen 2.

5. Copien las fórmulas de las celdas B2 y C2 para obtener los valores de la variable *y*. Revisen la tabla y busquen el renglón donde la variable *y* tenga el mismo valor en las columnas B y C. Los valores de la variable *x* y *y* en ese renglón son la solución del sistema.

6. Inserten una gráfica. Seleccionen las tres columnas y, en el menú Insertar, den clic en el icono XY (dispersión) y elijan la opción Dispersión con líneas suaves/marcadores. Localicen el punto donde ambas líneas se crucen. ¿Coincide la solución con las coordenadas del punto?

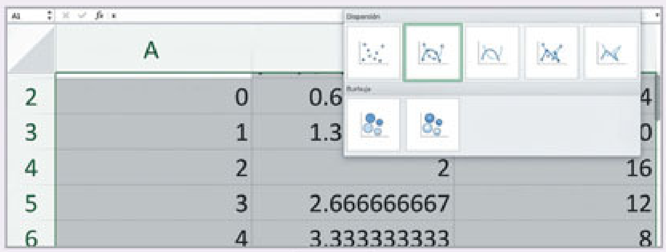


Imagen 3

Resolución de un sistema de ecuaciones usando una tabla de valores

Reúnete con tu compañero, retomen el sistema anterior y sigan los pasos para resolverlo con otro método.

1. Despejen la variable *y* de una de las ecuaciones. En este caso, la variable *y* es más fácil de despejar en la segunda ecuación. Del despeje se obtiene:

$$y = -4x + 24$$

2. En una hoja electrónica de cálculo, coloquen los títulos de la tabla como se muestra en la imagen 1. Luego anoten en la columna de la variable los valores del 1 al 10.

	A	B	C
1	x	y = -4x + 24	2x - 3y = -2
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Imagen 4

3. En la celda B2 ingresen la fórmula del encabezado quitando la *y* y sustituyendo la variable *x* por la celda A2. En la celda C2 escriban la primera parte de la ecuación del encabezado, sustituyendo la variable *x* por la celda A2 y la variable *y* por la celda B2, como se observa en la imagen 2.

	A	B	C
1	x	y = -4x + 24	2x - 3y = -2
2	0	=-4*A2+24	=2*A2-3*B2
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Imagen 5

4. En la columna C, busca el resultado de la ecuación del encabezado, en este caso busca la fila que contenga el valor -2.

	A	B	C
1	x	y = -4x + 24	2x - 3y = -2
2	0	=-4*A2+24	=2*A2-3*B2
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Imagen 6

Repite este método para el sistema de ecuaciones:

$$2x - 3y = -1$$
$$3x + 4y = 24$$

Despejen la variable *y* de cualquiera de las dos ecuaciones y propongan diferentes valores para la variable *x*.

Gráfica de proporción inversa

Aprendizaje esperado: Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpretarás y resolverás problemas que se modelan con estos tipos de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Lección 1 Proporcionalidad y funciones

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee la situación y haz lo que se pide.

Ana viajó de Puebla a Querétaro en autobús y tardó 4 horas. Teresa, su prima, viajó en automóvil y tardó 3 horas.

a. Si la velocidad promedio a la que viajó Ana fue de 90 km/h:

- ¿A qué velocidad viajó Teresa? ______
- ¿Cuánto tardaría en hacer ese viaje una persona que viaja en una motocicleta a 100 kilómetros por hora? ______
- ¿Y un ciclista que va a 30 kilómetros por hora? ______

b. Completa la tabla que relaciona diferentes velocidades con el tiempo en que se recorre la distancia de Puebla a Querétaro.

Vehículo	Velocidad (km/h)	Tiempo (horas)
Autobús	90	4
Automóvil 1		3
Motocicleta 1	100	
Motocicleta 2	80	
Bicicleta 1	30	
Bicicleta 2	40	
A pie	5	
Automóvil 2	150	
Automóvil 3	120	

- Observa cómo se relacionan el tiempo y la velocidad. ¿Es una relación de proporcionalidad directa o inversa? ¿Cómo lo sabes? ______

______

______

______

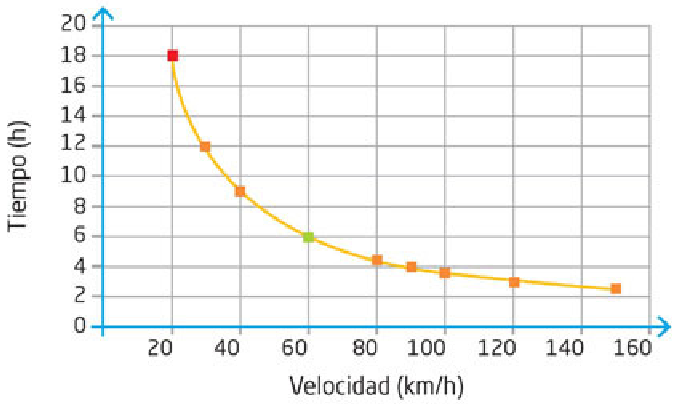
- **Comenta con tus compañeros y con tu profesor qué procedimiento utilizaste para encontrar las respuestas.**

Gráfica de una relación de proporcionalidad inversa

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Lee nuevamente el problema anterior y observa la gráfica que relaciona la velocidad de cada vehículo con el tiempo que tarda en recorrer la distancia de Puebla a Querétaro.**

Tiempo recorrido de Puebla a Querétaro



- Marca en la gráfica el punto que representa la velocidad de 80 km/h. ¿Cuál es el tiempo correspondiente? ____________________
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto marcado en rojo? ____________
- ¿Qué coordenadas tiene el punto marcado en verde? ____________
- ¿En qué caso se representa una mayor velocidad? ____________
- ¿Qué sucede en la gráfica a medida que aumenta la velocidad del recorrido?

____

- ¿Qué sucede con el tiempo cuando la velocidad del recorrido es muy pequeña?

____

- **Comenta con tus compañeros en qué se diferencia una gráfica de una relación de proporción inversa de una gráfica de proporción directa.**

2. **Lee la información y responde en tu cuaderno.**

En una relación de proporcionalidad inversa, la gráfica no forma una línea recta que pasa por el origen, como sucede en relaciones de proporcionalidad directa. La curva que forman los puntos en la gráfica de relación de proporcionalidad inversa se llama **hipérbola**.

Por ejemplo, dada una distancia fija, la relación entre tiempo y velocidad se puede escribir como $v = \frac{d}{t}$, donde d es constante. Al graficar esta función se obtiene una hipérbola como la de la actividad anterior.

a. ¿Qué sucede en una hipérbola a medida que aumentan los valores en el eje x?
b. ¿Y cuando disminuyen?
c. ¿Qué sucede cuando los valores en el eje x están cerca de cero?

Lección 2

Trazo de una gráfica de proporcionalidad inversa

1. **Lee el planteamiento y haz lo que se pide.**

La tabla muestra el tipo de cambio que presentó el dólar estadounidense el último día de diferentes años.

a. Encuentra cuántos dólares se podrían comprar con $500, según el tipo de cambio.

Año	Tipo de cambio (pesos por dólar)	Dólares
1970	.01250	
1980	.02327	
1990	2.94430	
1995	7.73960	
2005	10.63440	
2008	13.83250	
2011	13.94760	
2014	14.74140	
2017	19.66290	

Fuente: http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion= consultarCuadro& idCuadro=CF373&locale=es (consulta: 12 de febrero de 2018).

- ¿Qué sucede con la cantidad de dólares que se pueden comprar con determinada cantidad de pesos a medida que aumenta el tipo de cambio? ______

______

b. En tu cuaderno, traza una gráfica con los datos que registraste en la tabla. Utiliza el eje *x* para el tipo de cambio y el eje *y* para la cantidad de dólares.

- ¿Qué escala te conviene usar en cada eje? ______
- ¿Qué forma tiene la gráfica que elaboraste? ______
- ¿Se formó una línea recta? ¿Por qué? ______

  ______
- ¿Qué sucede en la gráfica a medida que aumenta el tipo de cambio? ______

  ______
- ¿Y cuando disminuye? ______

c. Localiza los puntos (10, 50), (20, 25) en la gráfica y responde.

- ¿A qué tipo de cambio corresponde cada uno? ______
- ¿Cuántos dólares se obtienen en cada caso? ______
- ¿Qué sucedería si el tipo de cambio fuera 1? ______

  ______
- ¿A qué punto de la gráfica corresponde? ______

Practicar para avanzar

Resuelve el problema en tu cuaderno.

1. Observa nuevamente la gráfica que hiciste en la lección anterior.
   - **a.** ¿Qué tendrías que hacer para mostrar en la gráfica anterior el tiempo que tardaría en recorrer la distancia de Puebla a Querétaro un avión que viaja a 900 km/h?
   - **b.** ¿Y para mostrar el tiempo que tarda en recorrer esta misma distancia una persona que camina a 4 km/h?

Comenta tus respuestas en grupo y validen sus resultados con ayuda del profesor.

Expresión algebraica de una relación de proporcionalidad inversa

2. **Lee la información y haz lo que se pide.**

   a. Analiza las relaciones de proporcionalidad inversa en los problemas anteriores.

   - ¿De qué manera se pueden expresar estas relaciones algebraicamente? ______
   ____
   - Si en el primer problema se denota la velocidad como v y el tiempo de recorrido como t. ¿Cuál de las siguientes expresiones relaciona las dos variables, dada la distancia de 360 kilómetros? Subraya tu respuesta.

     $v = 360t$ $\qquad$ $v = \dfrac{t}{360}$ $\qquad$ $v = \dfrac{360}{t}$

   - Escribe una expresión algebraica para el segundo problema. Usa (x) para denotar el tipo de cambio y (y) para la cantidad de dólares y $500 para la cantidad de pesos disponibles. Justifica tus respuestas. ________________
   ____

- **Compara las expresiones que obtuviste con las de tus compañeros. Verifica que, al sustituir, obtienes el tiempo de recorrido y la cantidad de dólares correctos.**

Una ecuación que representa una relación de proporcionalidad inversa entre las variables x y y tiene la forma $y = \dfrac{a}{x}$, donde a es cualquier número.

Herramientas académicas

Entra a la página www.esant.mx/fasema2-001 y consulta el tipo de cambio del peso frente al euro en distintos años. Traza una gráfica que represente la cantidad de euros que se pueden comprar con $1 000 en distintos años. ¿Qué forma tiene la gráfica?

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Lee el problema y haz lo que se pide.**

Dos terrenos de forma rectangular miden 200 m^2 cada uno. El primer terreno tiene un ancho mayor que el segundo. ¿Cómo debe ser el largo del segundo?

a. Completa la tabla con medidas de diferentes terrenos que tengan esa área.

Terreno	Ancho (m)	Largo (m)
1	200	
2		
3		

- ¿Cómo debe ser el largo del terreno a medida que crece su ancho? ____________
____
- Determina si la relación entre el largo y el ancho de los terrenos, dada una misma área, es una relación de proporcionalidad inversa y explica por qué.
____
____

b. Traza en tu cuaderno una gráfica que relacione el largo del terreno con su ancho. ¿Qué forma tiene la gráfica? ____________

c. Escribe una ecuación que relacione el largo del terreno con su ancho, dada una determinada área. ____________

2. **En cada problema haz lo que se pide y escribe una expresión algebraica que represente la relación. Registra tu trabajo en el cuaderno.**

a. El tiempo de llenado de un tanque de agua está relacionado con el número de pipas disponibles para llenarlo simultáneamente. Suponiendo que todas las pipas descargan la misma cantidad de agua por minuto, realiza lo siguiente.

- Calcula el tiempo y elabora una tabla para 5 diferentes cantidades de pipas si se quisiera llenar un tanque de 10 000 litros, suponiendo que las pipas descargan 250 litros de agua por minuto.
- Traza una gráfica que relacione el número de pipas con el tiempo de llenado.

b. En un campamento, existen provisiones para 300 participantes, para 42 días. Si llegan otros 50 participantes al campamento, ¿para cuántos días alcanzarán las provisiones?

- Elabora una tabla y una gráfica que relacione la cantidad de participantes con los días para los que alcanzan las provisiones.

- **Comenta con tus compañeros qué aprendiste sobre la proporcionalidad inversa, cómo son las gráficas que representan estas relaciones y qué características tienen las expresiones algebraicas.**

Reviso mi trayecto

Resuelve los problemas. Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Toma nota de los contenidos que necesitas repasar.

1. Un señor quiere rodear con una reja el patio que se representa en la imagen.

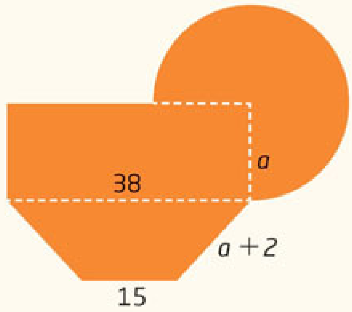
a. Escribe una expresión algebraica que determine el perímetro del patio. ____________

____

b. Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes a la expresión del inciso *a*. ____________

____

____



2. Un equipo de 4 integrantes terminó un proyecto de matemáticas en 6 horas. Un equipo de 9 integrantes tiene que hacer un proyecto similar al anterior.

a. ¿Cuánto tardará el segundo equipo en terminar? ____________

____

b. Si la dificultad de un nuevo proyecto es mayor y los alumnos del primer equipo calculan que les tomará el doble de tiempo, ¿cuántos miembros adicionales necesitan invitar para terminar el proyecto en 6 horas? Explica tu respuesta. ____________

____

____

3. La gráfica muestra cómo aumentó el precio de un producto en dos tiendas diferentes a lo largo de doce meses.

a. ¿Cuál era el precio del producto en cada tienda al iniciar el registro? ____________

____

b. ¿En cuál de las dos tiendas convenía comprar el producto en el cuarto mes?

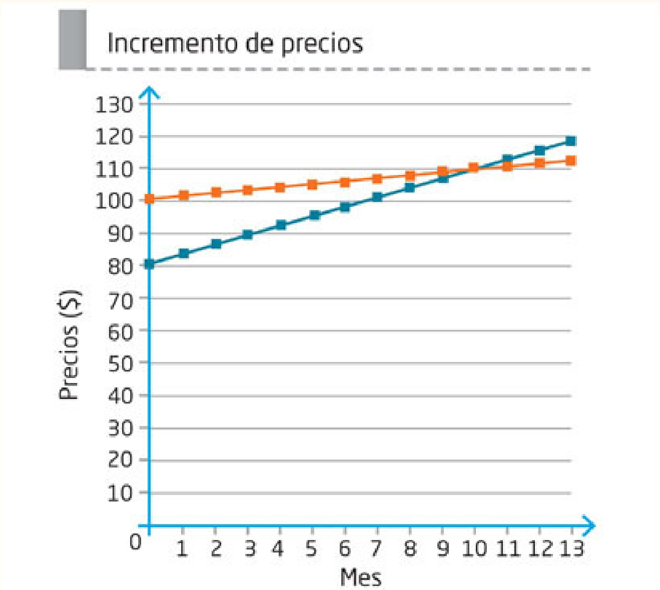
____

____

____

c. ¿En qué mes el precio del producto en ambas tiendas fue el mismo? ¿Cuánto cuesta? ____________

____



Secuencia didáctica

13 Polígonos y sus ángulos

Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás la relación entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

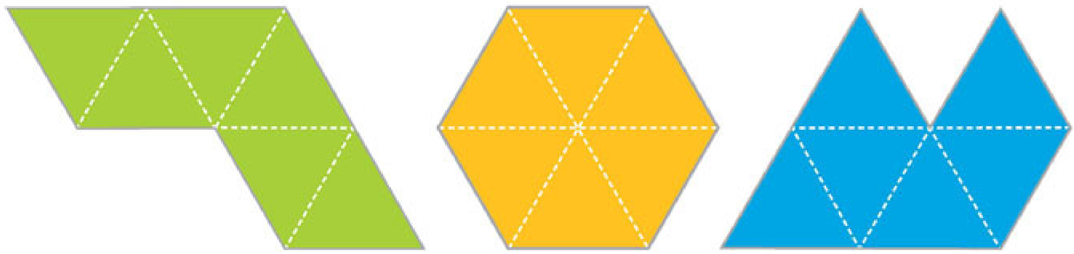
Lección 1

Rompecabezas y geometría

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee la información, observa las imágenes y responde.

Un rompecabezas está formado por diferentes piezas. Cada pieza del rompecabezas se forma con triángulos equiláteros unidos por sus lados. A continuación se muestran tres piezas de este rompecabezas.



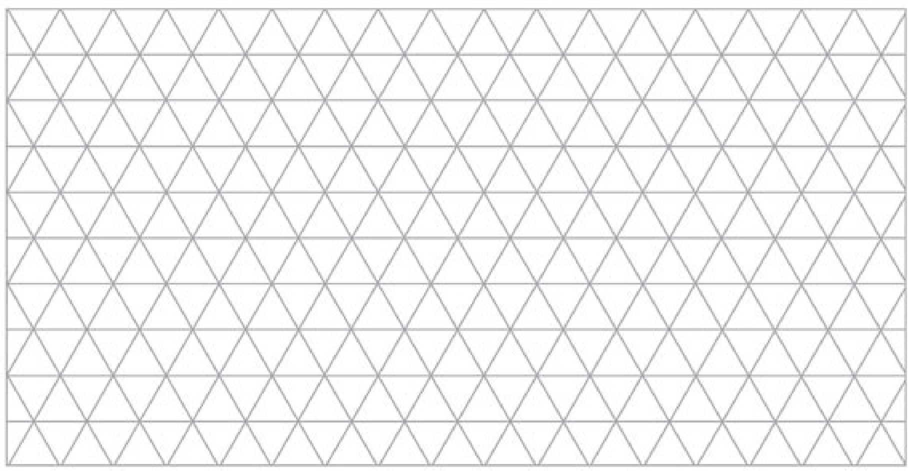
Pieza 1 **Pieza 2** **Pieza 3**

a. ¿Cuántos lados tiene cada una de las piezas anteriores? ____________________

b. Marca los ángulos interiores de cada pieza. ¿Cuántos tiene cada una? __________

c. ¿Cómo se llaman las figuras anteriores? ____________________

d. En equipos, tracen las piezas del rompecabezas en la retícula. Consideren que dos piezas son la misma si al girarlas encajan una sobre otra.



- ¿Cuántas piezas diferentes pueden formar? ____________________
- ¿Por qué se puede afirmar que las formas de las piezas de este rompecabezas son polígonos? ____________________

____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y comparen sus figuras.**

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos geométricos

¿Cómo son los ángulos internos de otros polígonos?

TRAYECTO FORMATIVO

1. **En equipo elaboren las piezas con material reciclable, usen triángulos de 5 cm de lado y construyan las siguientes figuras. Luego analicen los lados y los ángulos de cada una.**


Figura 1


Figura 2

Ambas figuras son hexágonos. La figura 1 es un ejemplo de polígono **convexo** y la figura 2 es un ejemplo de polígono **cóncavo**.

a. ¿En qué se diferencian estos dos hexágonos? ______________________

____

b. ¿Cómo se puede diferenciar un hexágono convexo de uno cóncavo? ______________________

____

____

c. Elijan una de las piezas de su rompecabezas y construyan una semejante, con la misma forma, pero más grande, con cuatro piezas del rompecabezas.

- ¿Cuántos lados y ángulos tiene la nueva figura? ______________________
- Midan los lados y los ángulos de la pieza y de la que construyeron. ¿Qué diferencias y similitudes observan entre ambas? ______________________

____

2. **Construyan las siguientes figuras con las piezas que elaboraron.**

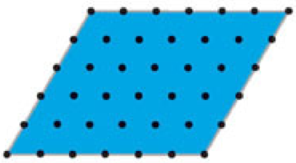


Figura 1

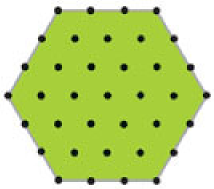


Figura 2

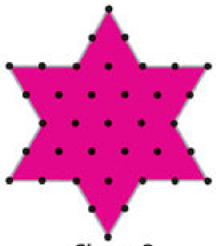


Figura 3

a. Midan los ángulos interiores de las figuras anteriores y completen la tabla.

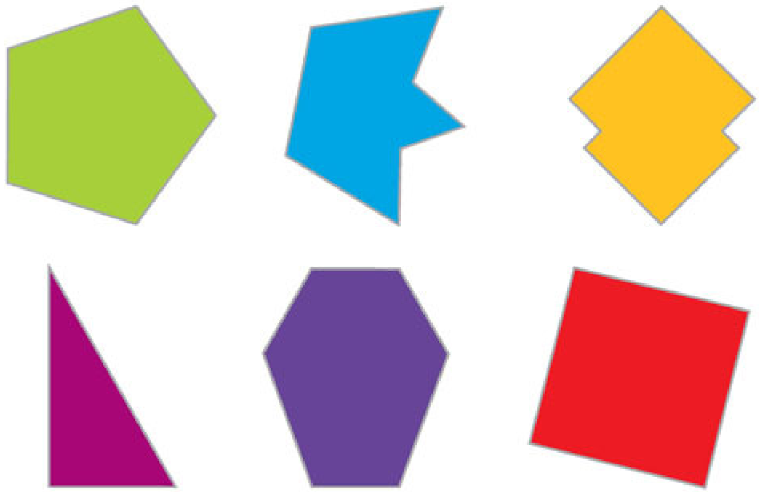
Polígono	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Núm. de ángulos mayores que 180°			
Núm. de ángulos menores que 180°			

- **Comenten en grupo qué relación hay entre el número de lados y el número de ángulos interiores de un polígono. Luego concluyan cómo se diferencia un polígono cóncavo de uno convexo.**

Lección 2

¿Cómo son los ángulos internos de otros polígonos?

1. **Analiza los ángulos internos de los polígonos con un transportador y responde.**



a. ¿Cuánto miden el menor y el mayor de los ángulos interiores de los polígonos?

____

b. ¿Cuál es el valor máximo que puede medir el ángulo interior de un polígono? ¿Y el mínimo? _______________

____

c. ¿El valor máximo depende del número de lados? ¿Por qué? _______________

____

____

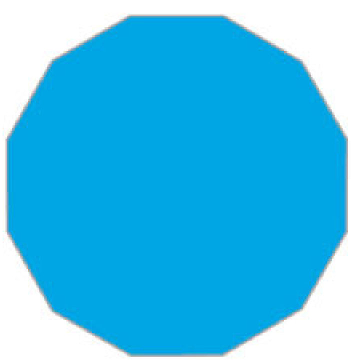
d. ¿El valor mínimo depende del número de lados? ¿Por qué? _______________

____

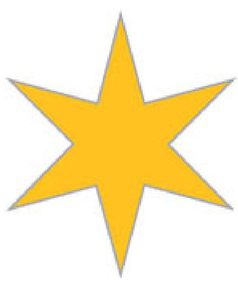
- **Comenten en grupo las características de los polígonos y propongan una forma de agruparlos con base en el análisis de sus ángulos.**

2. **Observa la siguiente clasificación, mide los ángulos y los lados, y luego responde.**

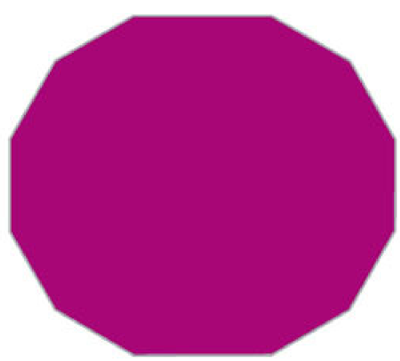
Polígono regular



Polígono cóncavo



Polígono convexo



a. Menciona las características de cada uno de los tres polígonos. Considera sus similitudes y diferencias. ______________________________

____

____

____

b. Con base en tu descripción y en lo visto en las actividades de la lección, define los tipos de polígonos.

- Polígono convexo. ______________________________

  ____

- Polígono cóncavo. ______________________________

  ____

- Polígono regular. ______________________________

  ____

- **Compara tus definiciones con tus compañeros y compleméntenlas. Luego valídenlas con su profesor y clasifiquen las figuras trabajadas en la secuencia.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Traza dos polígonos que tengan ángulos interiores menores de 180°.**

2. **Traza dos polígonos que tengan ángulos interiores de 90°.**

3. **Traza dos polígonos con al menos un ángulo interior de más de 180°.**

- **Compara tus polígonos con los de tus compañeros y clasifíquenlos con base en la descripción que hicieron. Luego comenten si es posible trazar un polígono cuyos ángulos sean todos mayores que 180°.**

Secuencia didáctica 14

Diagonales de los polígonos

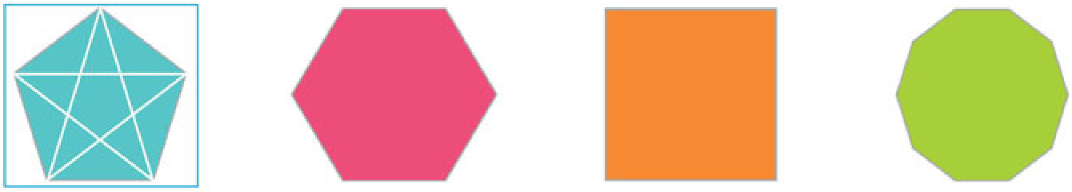
Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás la relación entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Lección 1

Las diagonales

PUNTO DE PARTIDA

1. Observa el ejemplo y traza las diagonales de los siguientes polígonos.



a. ¿Cómo definirías la diagonal de un polígono? ____________________

____

b. Ahora une los vértices no consecutivos del hexágono.

c. Dibuja en tu cuaderno un cuadrilátero y un pentágono cóncavo y traza sus diagonales.

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y analicen qué diferencia hay entre el número de diagonales de un polígono cóncavo y de uno convexo con el mismo número de lados.**

¿Cuántas diagonales tiene un polígono?

TRAYECTO FORMATIVO

1. Reúnete con un compañero y completen la tabla.

Polígono	Número de lados	Número de diagonales
Triángulo		
Cuadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
Octágono		

a. Analicen el patrón o relación en el número de diagonales a medida que aumenta el número de lados del polígono. Anoten sus observaciones y, descríbanlo. ____

____

b. Dibujen en su cuaderno un eneágono (9 lados) y tracen sus diagonales.

- ¿Cuántas diagonales tiene? ______
- ¿El número de diagonales coincide con el patrón? ______

- **Si no coincide, verifiquen si contaron correctamente o revisen la secuencia de datos y propongan un nuevo patrón.**

2. **Retomen la tabla anterior y anoten cuántas diagonales se pueden trazar desde cada vértice.**

Polígono	Número de lados o vértices	Número de diagonales que parten de cada vértice	Número de diagonales
Triángulo	3	0	0
Cuadrado	4	1	2
Pentágono	5	2	5
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Octágono	8		

a. ¿Qué relación hay entre el número de lados y el número de diagonales que parten de cada vértice? ______

b. ¿Se cumple siempre esa relación? ¿Por qué? ______

______

c. Si n representa el número de vértices de un polígono, ¿cómo expresarían el número de diagonales que parte de cada vértice? ______

d. Para cada polígono, multipliquen el número de vértices por el número de diagonales que parte de cada vértice. Agreguen una columna a la tabla de esta página y anoten sus resultados.

- ¿Qué relación existe entre esos datos y el número de diagonales que tiene un polígono? ______

- **Con base en lo trabajado, expliquen por qué el número de diagonales de un polígono está dado por la fórmula y valídenlo con el profesor.**

Número de diagonales de un polígono de n lados $= \dfrac{n(n-3)}{2}$

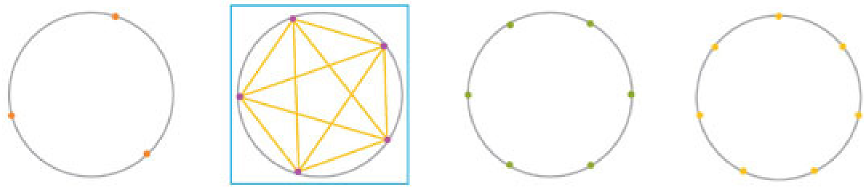
Practicar para avanzar

1. En tu cuaderno, traza un polígono de 13 vértices. Escoge un vértice y conecta con un segmento ese vértice a otro, saltándote un vértice. Continúa el proceso hasta que hayas construido una estrella. Repite el proceso saltándote dos vértices, luego tres, y así sucesivamente hasta que ya no puedas trazar más diagonales.

   a. ¿Coincide el número de diagonales trazadas con lo que resulta de usar la fórmula?

Lección 2 Las diagonales de un polígono en una circunferencia

1. **Observa el ejemplo y traza todos los segmentos que unan los puntos sobre cada circunferencia.**



2. **Reúnete con un compañero y completen la tabla. Anoten cuántas cuerdas se pueden trazar con cada número de puntos sobre una circunferencia.**

Glosario

cuerda. Segmento que une dos puntos sobre una circunferencia.

Polígono	Número de puntos sobre la circunferencia	Número de cuerdas
	2	
Triángulo	3	
Cuadrilátero	4	
Pentágono	5	10
Hexágono	6	
Heptágono	7	
Octágono	8	
Eneágono	9	

a. Observen los resultados de la última columna. ¿Existe algún patrón para saber cuántas cuerdas se podrán trazar si se continúa la secuencia? Justifiquen su respuesta. ______________________

____

b. Retomen la tabla anterior en su cuaderno y anoten cuántas cuerdas se pueden trazar desde cada vértice. Luego respondan.

- ¿Qué relación hay entre el número de puntos que hay sobre la circunferencia y el número de cuerdas que se pueden trazar desde cada punto? ______________________

  ____

- En cada renglón de la tabla anterior, multipliquen el número de puntos sobre la circunferencia por el número de cuerdas que parten de cada punto. ¿Qué relación existe entre el resultado y el número de cuerdas? ______________________

  ____

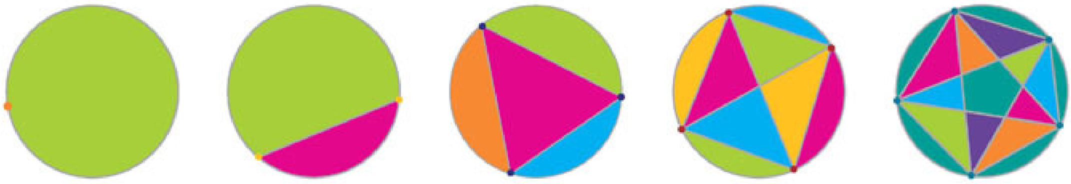
- **Expliquen por qué el número de cuerdas que se pueden trazar cuando se unen *n* puntos sobre una circunferencia está dado por la fórmula que está abajo. Validen su explicación con el profesor.**

$$\text{Número de cuerdas} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Aplica lo que aprendiste.

1. **Observa la secuencia y haz lo que se pide.**

PUNTO DE LLEGADA



a. Cuenta las regiones que se forman dentro del círculo al trazar todas las cuerdas posibles dado un cierto número de puntos sobre la circunferencia.

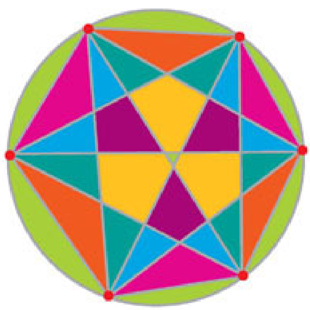
Observa que al conectar 2 puntos se generan 2 regiones, y al trazar las cuerdas que unen 4 puntos se generan 8 regiones.

- Sin dibujar, responde en cuántas regiones queda dividido el círculo que tiene 6 puntos en la circunferencia al trazar todas las cuerdas. ____________________

b. Completa la tabla.

Número de puntos sobre la circunferencia	Número de regiones que se generan al trazar todas las cuerdas
1	
2	2
3	
4	8
5	
6	

c. Observa la figura y contesta.



- ¿Cuántas regiones tiene? ____________________
- ¿Es el número que esperabas? ____________________

Herramientas académicas

Usa GeoGebra. Traza una circunferencia, coloca seis puntos y únelos con segmentos como en la figura. Mueve los puntos y observa lo que sucede con el número de regiones.

- **Explora con tus compañeros cuántas regiones se forman al trazar 7 puntos sobre la circunferencia de un círculo y confirma que el patrón ya no se cumple.**

Secuencia didáctica

15

Ángulos centrales y polígonos

Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás la relación entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

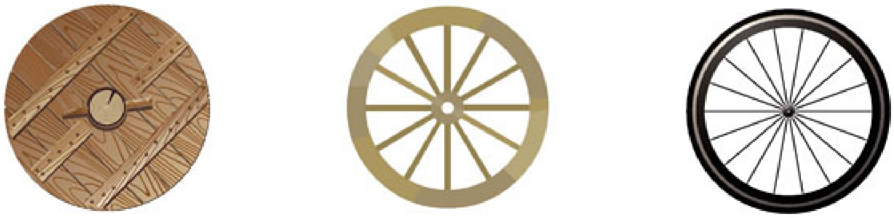
Lección 1

Ángulos centrales de una circunferencia

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee la información, observa las imágenes y responde.

Las primeras ruedas construidas por el ser humano estaban formadas por discos de madera con perforaciones en el centro para insertarlas en ejes. Se estima que entre los años 2000 y 1200 antes de nuestra era surgieron las primeras ruedas con rayos o **radios**, las cuales eran más ligeras y, por tanto, permitieron construir vehículos más rápidos.



Glosario

arco. Segmento de una circunferencia.
radio. Segmento que une cualquier punto de la circunferencia con su centro.

a. ¿Qué característica tienen los segmentos que están dentro de las ruedas? ______

b. ¿Cómo son los **arcos** que se forman entre los rayos (radios) de las ruedas? ¿Por qué es importante que los arcos sean así? ______

______

______

c. ¿Qué utilidad tienen los rayos de una rueda? ______

______

______

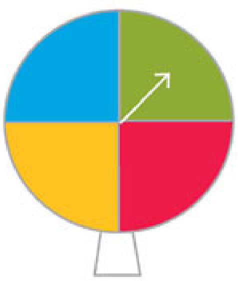
d. ¿Qué otros usos o aplicaciones conoces con esta misma idea de la rueda? ______

______

Las ruletas y el ángulo central

TRAYECTO FORMATIVO

1. En equipos de tres estudiantes, observen la ruleta y hagan lo que se pide.



Ruleta 1

a. Propongan un procedimiento para construir la ruleta.

______

______

______

______

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos geométricos

b. Elaboren la ruleta con el procedimiento que plantearon. ¿Qué dificultades tuvieron para construirla? ____________________

____

c. ¿Las cuatro divisiones que hicieron son del mismo tamaño? ¿Por qué? ________

____

____

____

d. Observen el diseño de la ruleta 2 y respondan.

- ¿El procedimiento que utilizaron en la ruleta 1 sirve para construir la ruleta 2? ¿Por qué? ____________

  ____

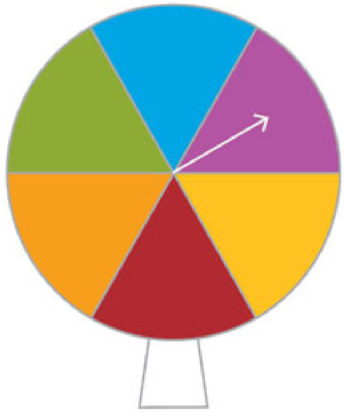
  ____

- Elaboren la ruleta 2 y anoten las diferencias entre ambos procedimientos ____________________

  ____

  ____

  ____

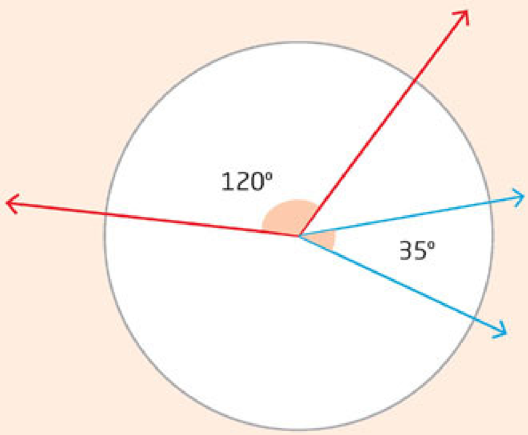


Ruleta 2

- **Comenten con sus compañeros las dificultades que tuvieron al construir cada ruleta y propongan cómo solucionarlas.**

2. **Lean la información por equipos y comenten cómo pueden utilizarla para construir ambas ruletas.**

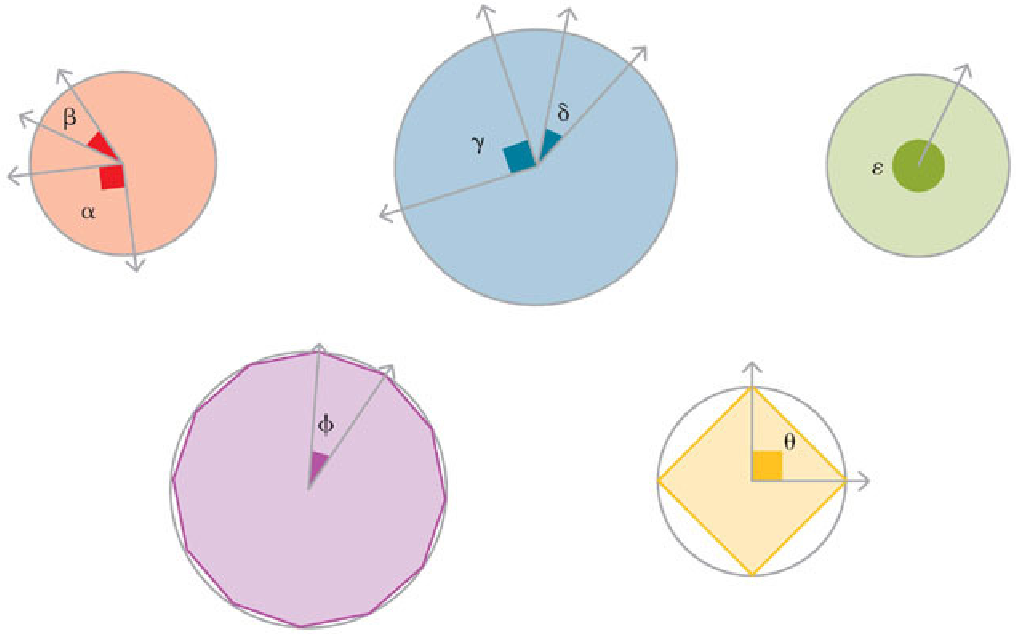
Un **ángulo central** es un ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia. En la imagen se señalan dos ángulos centrales y sus medidas. Uno mide 120º y el otro, 35º.



- **Analicen cuánto mide el ángulo que da la vuelta completa y si la información puede complementar sus procedimientos. Si es así, modifíquenlos.**

Lección 2 ## Ángulos centrales y sus medidas

1. **Mide con un transportador los ángulos y anota sus medidas. Luego compara los ángulos y responde.**



- $\measuredangle\alpha =$ ____________________
- $\measuredangle\beta =$ ____________________
- $\measuredangle\gamma =$ ____________________
- $\measuredangle\delta =$ ____________________
- $\measuredangle\varepsilon =$ ____________________
- $\measuredangle\theta =$ ____________________
- $\measuredangle\phi =$ ____________________

a. ¿Cómo son las medidas de los ángulos α y γ? ____________________

b. ¿La medida de los ángulos depende del tamaño de la circunferencia? ¿Por qué?

____

____

c. ¿Cuántas veces cabe el ángulo δ en el ángulo β? ____________________

d. ¿Qué ángulos de las circunferencias miden lo mismo que los ángulos de los polígonos regulares? ____________________

e. ¿Qué relación hay entre los ángulos de los polígonos y las circunferencias en las que están **inscritos** los polígonos? ____________________

____

f. ¿Los ángulos de los polígonos pueden considerarse ángulos centrales? ¿Por qué? ____________________

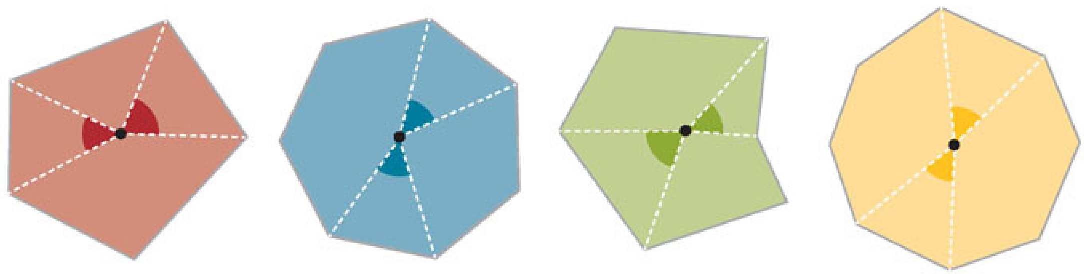
____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y analicen si todos los ángulos de un polígono tienen la misma relación con la circunferencia.**

Glosario

inscrito.
En geometría, se dice que un polígono está inscrito en una circunferencia cuando todos sus vértices están sobre la circunferencia.

2. **En cada caso, traza una circunferencia apoyando el compás sobre el punto marcado, de tal forma que la circunferencia pase por al menos un vértice del polígono.**



Polígono 1 **Polígono 2** **Polígono 3** **Polígono 4**

a. ¿La circunferencia trazada pasa por todos los vértices del polígono 1? ______

b. ¿En qué otros polígonos ocurre lo mismo? ______

c. De acuerdo con la clasificación de polígonos que trabajaste en la secuencia 13, ¿qué tipo de polígonos se pueden inscribir siempre en una circunferencia? ______

______

______

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y, con apoyo del profesor, concluyan en qué casos se puede hablar de ángulos centrales de un polígono y en qué casos no y por qué.**

3. **A partir de las actividades anteriores, escribe una definición de ángulo central de un polígono regular.**

Ángulo central: ______

______

Practicar para avanzar

1. En equipos, observen las ruletas y contesten.

a. ¿En cuántas partes iguales está dividida cada ruleta? ______

______

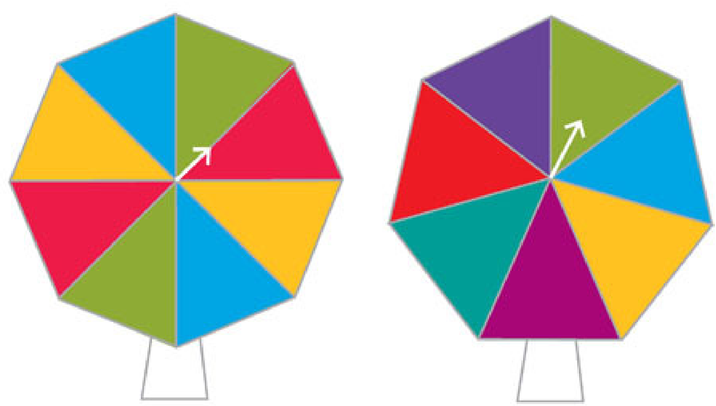
b. ¿Cuánto miden los ángulos centrales de cada una de ellas?

______

______

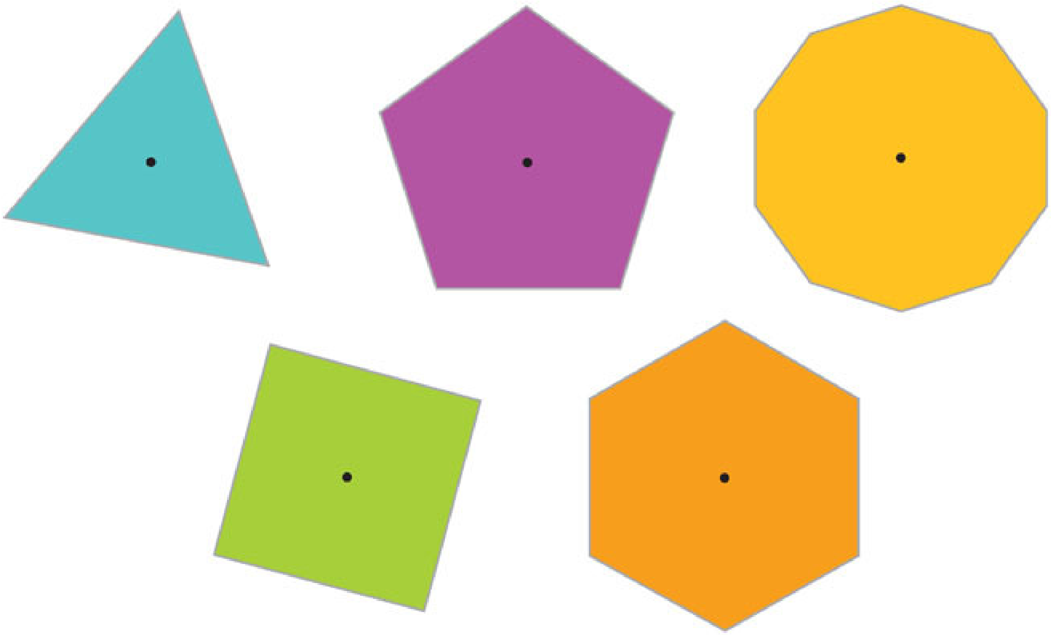
______

______



Lección 3 Polígonos regulares y ángulos centrales

1. **Inscribe cada uno de los siguientes polígonos regulares en una circunferencia , y traza los triángulos que se forman con los ángulos centrales.**



a. En cada polígono regular, une cada vértice con el centro de la circunferencia que lo contiene. Mide todos los ángulos centrales y responde.

- ¿Cómo son las medidas de los ángulos centrales de un mismo polígono? ____
- ¿Cuánto suman los ángulos centrales de cada polígono? ____
- ¿Cómo son los triángulos en que queda dividido cada polígono? ____
- Observa dos triángulos del mismo polígono. ¿Cómo son? ____
- ¿Ocurre lo mismo en los demás polígonos? ¿Por qué? ____
- ¿Con base en lo anterior se puede asegurar que los ángulos centrales de un polígono regular son iguales? ¿Por qué? ____

b. Utiliza lo que aprendiste en primero de secundaria sobre congruencia de triángulos para justificar tu respuesta anterior. ____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y propongan un método para conocer la medida de los ángulos centrales de un polígono regular sin necesidad de medirlos.**

2. **Utiliza el método que plantearon en grupo para completar la tabla.**

Polígono regular	Número de lados	Medida del ángulo central	Suma de ángulos centrales
	3		
Cuadrado			
	5		
Hexágono			
	7		
		45°	
Eneágono			
	10		

- **Analicen los datos de la tabla y discutan cómo podrían saber a qué polígono corresponde un ángulo dado.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Observa la imagen y contesta.**

La primera rueda de la fortuna fue construida en 1893 por el ingeniero George Washington Ferris.

a. ¿Cómo calcularon los ingenieros la distancia entre cada canastilla? ______________________

____

b. Si fueran únicamente 20 cabinas, ¿cómo las colocarías donde deben ir? ______________________

c. Realiza las operaciones e indica cómo localizar las cabinas. ______________________

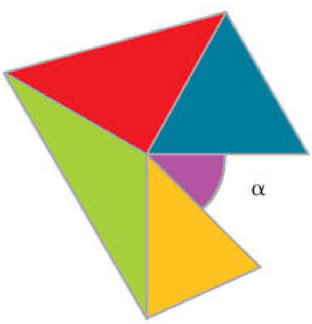
____

d. Un alumno de primero de secundaria propuso calcular el diámetro de la rueda y dividirla en 20 partes para saber dónde colocar las cabinas. ¿Qué método consideras que es más eficaz? ¿Por qué? ______________________

____

2. **Lee la descripción de la figura y encuentra el valor del ángulo.**

Los triángulos en la figura se tomaron de recortar los ángulos centrales de diferentes polígonos regulares. El triángulo azul se tomó de un hexágono, el rojo de un cuadrado, el verde de un triángulo equilátero y el amarillo de un octágono.



a. ¿Cuánto mide el ángulo α? ______________________

b. ¿De qué polígono regular se debe tomar el triángulo que cubra el espacio que falta? ______________________

- **Comenten en grupo en qué otras situaciones es necesario calcular los ángulos centrales de un polígono y por qué es importante saber sus medidas.**

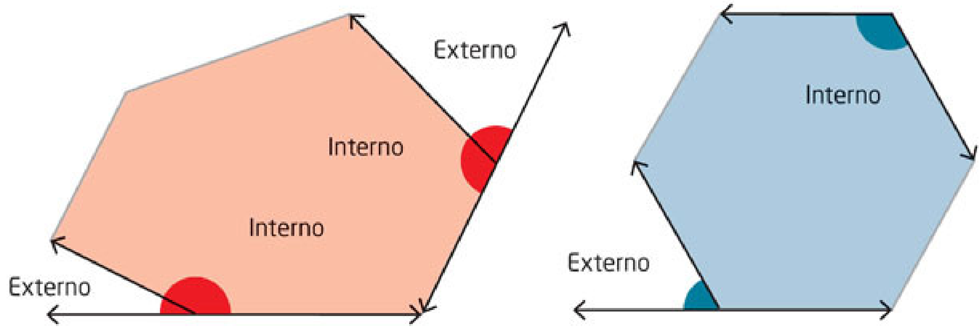
Más sobre ángulos de polígonos

Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás la relación entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Lección 1 Ángulos internos y externos de polígonos convexos

PUNTO DE PARTIDA

1. Reúnete con un compañero, analicen las figuras y respondan. Las figuras muestran los ángulos internos y los ángulos externos de dos polígonos.



a. ¿Cómo pueden identificar los ángulos internos de un polígono convexo? ______

b. ¿Cómo pueden identificar los ángulos externos de un polígono convexo? ______

c. ¿Qué relación hay entre el ángulo interno y el externo que comparten el mismo vértice? ______

d. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos de cada polígono? ______

e. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos externos de cada polígono? ______

f. ¿Cómo se puede calcular la suma de los ángulos internos sin medirlos? ______

- **Compartan sus respuestas con el resto del grupo. Comparen las sumas en ambos polígonos, analicen los resultados y comenten si ocurrirá lo mismo con otros polígonos con el mismo número de lados.**

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos geométricos

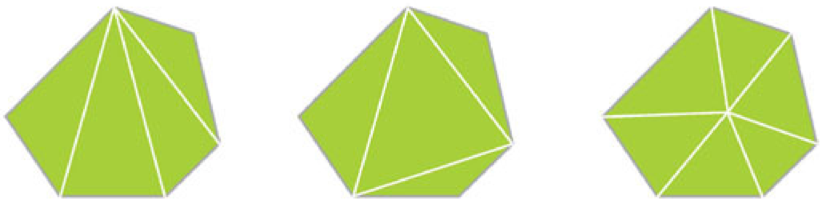
Suma de los ángulos interiores de un polígono

TRAYECTO FORMATIVO

1. **En equipo, analicen la estrategia para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono.**

Un método para calcular la suma de los ángulos interiores consiste en dividir el polígono en triángulos que no se **traslapen** y que cubran todo el polígono.

a. Las figuras muestran tres maneras de triangular un mismo polígono.



Triangulación 1 **Triangulación 2** **Triangulación 3**

Glosario

traslapar. Cubrir total o parcialmente algo con otra cosa.

- Tracen los ángulos internos en cada triangulación y, sin usar transportador, calculen la suma de sus ángulos internos.
- ¿Por qué es útil dividir el polígono en triángulos para calcular la suma de los ángulos interiores del polígono? ____________________
- ¿ Cuál de las triangulaciones es más útil para hacer el cálculo? ¿Por qué? ____________________

b. ¿Se puede hacer una triangulación parecida a la que consideras más útil para cualquier polígono? ¿Por qué? ____________________

- **En una hoja tracen diferentes polígonos. Consideren polígonos regulares, cóncavos y convexos, y traten de triangularlos para comprobar su respuesta anterior. ¿Existe alguna relación entre el número de lados y el número de triángulos que se forman?**

Practicar para avanzar

1. Mide los ángulos del polígono que se muestra, calcula la suma de sus ángulos interiores y luego trata de triangularlo.

Compara la suma de los ángulos internos y el número de triángulos que pudiste formar, con la suma de los ángulos y el número de triángulos de los polígonos que trabajaste en la lección. ¿Qué relación existe? ¿Por qué?

Lección 2 La suma de los ángulos internos y externos

1. Completa la tabla a partir de lo que hiciste en la lección anterior. Recuerda que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

Polígono	Número de lados	Número de triángulos interiores	Suma de los ángulos interiores del polígono
Cuadrilátero			360°
Pentágono		3	
Hexágono	6		
	7		
	8		
	9	7	1 260°

a. Los ángulos interiores de un polígono regular son congruentes, es decir, miden lo mismo. Con base en la tabla y en lo anterior, calcula cuánto mide cada ángulo interior de cada uno de los siguientes polígonos.

- Triángulo equilátero: ______
- Hexágono regular: ______
- Eneágono regular: ______

b. Traza en tu cuaderno un triángulo, un hexágono y un eneágono. En cada uno marca todos sus ángulos externos y calcula la suma de esos ángulos.

- Triángulo: ______
- Hexágono: ______
- Eneágono: ______

c. ¿Qué relación existe entre el número de lados y la suma de los ángulos externos?

______

______

2. Con base en lo que has trabajado, completa la tabla.

Polígono	Número de lados	Suma de sus ángulos		Medida del ángulo interno de un polígono regular
		Internos	Externos	
	4			
	5			
	6			
	7			
	8			
	9			

- **Compara tus respuestas con tus compañeros. Deduzcan una fórmula que les permita calcular la medida de los ángulos internos y externos de un polígono y la suma de estos a partir del número de lados.**

3. **Lee la siguiente información. Luego, en grupo, comparen las fórmulas que obtuvieron con las que se muestran.**

La medida de los ángulos internos de un polígono regular de n lados se puede calcular con la fórmula:

$$\text{Ángulo interno} = \frac{180°(n-2)}{n}$$

Y la medida de los ángulos externos se obtiene con la fórmula:

$$\text{Ángulo externo} = \frac{360°}{n}$$

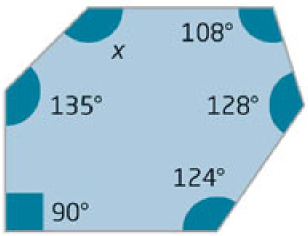
Aplica lo que aprendiste.

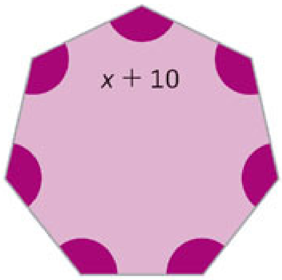
PUNTO DE LLEGADA

1. **Completa la tabla y calcula el valor de los ángulos internos si los polígonos fueran regulares.**

Polígono	Número de lados	Suma de sus ángulos internos	Medida de los ángulos internos
Hexágono			
Dodecágono			
Hectágono	100		

2. **A partir de lo trabajado, calcula la suma de los ángulos internos y establece una ecuación para obtener el valor de x en cada polígono.**





- **Comenta con tus compañeros si en un polígono cóncavo se puede establecer la misma relación entre el número de lados y la suma de los ángulos externos. Expliquen por qué.**

Suma de los ángulos centrales de los polígonos

Reúnete con un compañero y realicen las exploraciones para saber cuánto suman los ángulos centrales de un polígono.

1. Entren a la página www.geogebra.org/?lang=es y seleccionen la opción Geometría.

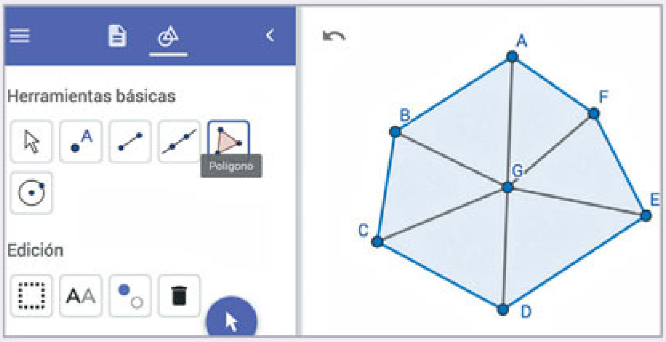


Imagen 1

2. Con la herramienta Polígono, formen un hexágono, trazando segmentos de *A* a *B*, de *B* a *C*, y así sucesivamente hasta volver al punto *A*. Luego coloquen un punto en el centro del polígono.

3. Conecten el punto central con cada vértice del polígono.

4. Para medir el ángulo $\angle AGB$, con la herramienta de medición Ángulo, den clic en los puntos que tienen esas letras, siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj.

5. Repitan el procedimiento para obtener todos los ángulos centrales. Con la herramienta Elige y mueve, reubiquen las medidas que aparezcan para que sean más legibles.

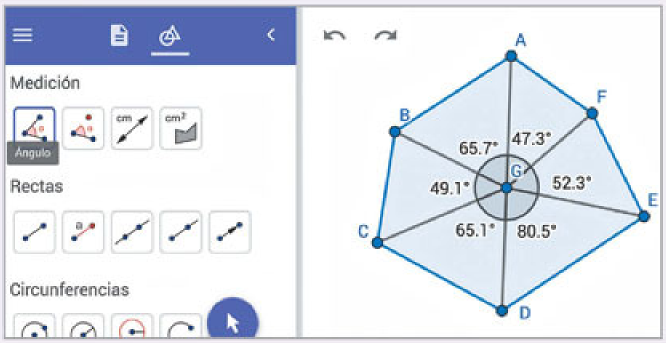


Imagen 2

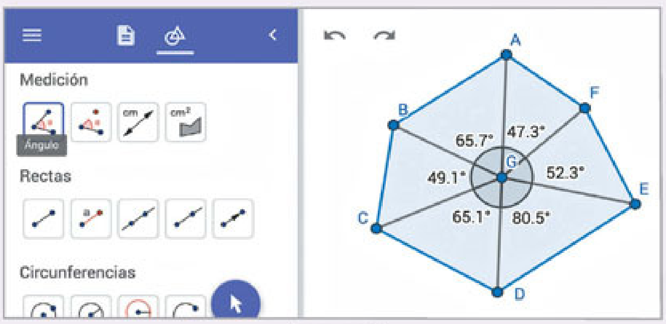


Imagen 3

6. Para ingresar al menú Pasos, den clic al icono que se localiza en la parte superior.

7. En la sección Entrada, con ayuda del teclado de GeoGebra ingresen la expresión "$\alpha+\beta+\gamma+\epsilon+\zeta$" y opriman la tecla Enter. Arrastren el resultado a un lado del hexágono.

8. Con la herramienta Elige y mueve, trasladen el punto central. Observen que las medidas de los ángulos cambian. También pueden mover los vértices del hexágono.

Comenta con tus compañeros qué pasa con la suma de los ángulos centrales cuando cambias la posición de los puntos.

Suma de los ángulos interiores de los polígonos

Reúnete con un compañero. Sigan los pasos para saber cuánto suman los ángulos internos de un polígono.

1. Tracen un polígono de 7 lados.

2. Con la herramienta de medición Ángulo, encuentren la medida de cada uno de sus ángulos interiores. Recuerden seleccionar siempre los vértices en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Imagen 4

3. Para encontrar la suma de los ángulos interiores del polígono, abran el menú Pasos y, usando el teclado de GeoGebra, ingresen la expresión "$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta+\eta$" y opriman la tecla Enter.

Verifiquen el resultado con la fórmula que estudiaron en la secuencia 16.

4. Para calcular la suma de los ángulos exteriores del polígono, regresen al menú Herramientas haciendo clic en el icono .

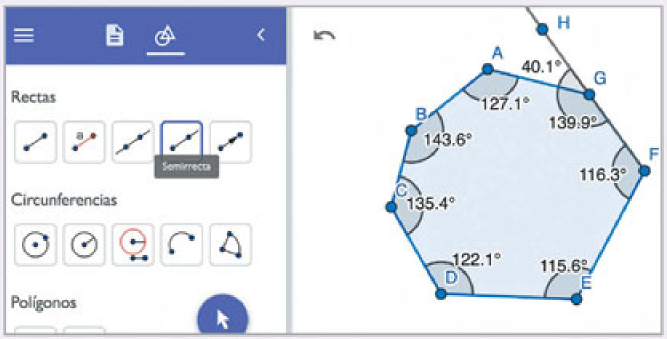


Imagen 5

5. Tracen una semirrecta que pase por dos de los vértices del polígono, haciendo clic en los puntos en sentido contrario a las manecillas del reloj. Luego tracen un punto sobre la semirrecta.

6. Con la herramienta Ángulo, den clic en los tres puntos que forman el ángulo exterior y encuentren su medida.

7. Repitan el procedimiento para cada vértice del polígono y encuentren la medida de todos los ángulos exteriores.

8. Regresen a la pantalla Pasos y calculen la suma de todos los ángulos exteriores del polígono ingresando la expresión "$\phi+\iota+\kappa+\lambda+\mu+\nu+\xi$" con el teclado de GeoGebra.

Verifiquen que el resultado coincide con lo que estudiaron en la secuencia 16. Luego tracen polígonos con diferente número de vértices y repitan el procedimiento.

Punto de encuentro

Lee el texto y haz lo que se pide.

Decisiones ecológicas

La contaminación es un problema causado por diversos factores. Sin embargo, la emisión de gases de los automóviles por la quema de combustible es uno de los agentes contaminantes de mayor impacto.
Aunque existen políticas públicas diseñadas para reducir el problema, también es importante que los ciudadanos sepan elegir un automóvil para disminuir el uso de combustible.

1. **Reúnete con un compañero, lean la situación y contesten.**

Una compañía tiene una flotilla de automóviles, de los cuales la mitad de ellos son modelos compactos, con un rendimiento aproximado de 6.37 km/L y la otra mitad son minivanes cuyo rendimiento aproximado es de 6.38 km/L. Todos los automóviles recorren en promedio 21 700 km al año.

Con el fin de contribuir al cuidado del ambiente, la compañía destinó cierto presupuesto para cambiar todos los automóviles de un tipo con base en su rendimiento para disminuir el consumo de gasolina. Las opciones que tiene son:

I) Cambiar los automóviles compactos por automóviles híbridos con un rendimiento de 23.8 km/L.
II) Cambiar las minivanes por camionetas con un rendimiento de 10.63 km/L.

a. ¿Qué decisión consideran mejor? ¿Por qué? ____________________

____

b. Calculen la razón de los kilómetros recorridos en un año entre la cantidad de kilómetros por litro que rinde el automóvil compacto. ____________________

c. Hagan lo mismo con el rendimiento del automóvil híbrido. ____________________

d. Resten ambas razones para saber cuántos litros se ahorrarían en un año con el automóvil híbrido. ____________________

e. Repitan el procedimiento para calcular cuántos litros se ahorrarían en un año con las camionetas. ____________________

f. Si la gasolina cuesta $14.00 el litro, ¿cuánto ahorraría la compañía en cada caso?

____

g. A partir de lo realizado, ¿qué opción le conviene a la compañía? ____________________

____

- **Comparen sus respuestas con el resto del grupo y revisen si su respuesta al inciso *a* fue correcta.**

2. **En parejas, analicen la tabla y respondan.**

Rendimiento km/L	Litros de gasolina usados en un año
4.25	5105.88
6.38	3401.25
8.50	2552.94
10.63	2041.39
12.75	1701.96
14.88	1458.33
17.00	1276.47

a. Elaboren una gráfica en su cuaderno con los datos de la tabla y unan los puntos. ¿La gráfica es una línea recta? ______

b. ¿Qué tipo de relación existe entre los datos de ambas columnas? Justifiquen su respuesta. ______

En términos ambientales y económicos, pensar en kilómetros por litro no es conveniente, ya que lo importante es saber cuántos litros de gasolina se gastan. Por tanto, es necesario expresar el rendimiento en términos de litros por kilómetro, para lo cual se necesita invertir la razón o hallar el inverso multiplicativo.

c. Para calcular el inverso de 10.63 km/L realicen la operación 1 ÷ (10.63 km/L). ¿Cuál es el resultado? ______

d. Debido a que el número resultante es muy pequeño, multipliquen la cantidad por 100 para expresarlo en litros por centenas de kilómetros (L/100 km).

- ¿A cuánto equivale? ______

e. Conviertan con su calculadora los datos de la columna km/L a L/100 km. Anoten los datos en su cuaderno y tracen la gráfica. Tomen los datos en L/100 km para el eje *x* y los litros de gasolina usados en un año para el eje *y*. Luego respondan.

- ¿Qué tipo de relación representa la gráfica? ______
- ¿Qué sucede si se disminuyen en una unidad los L/100 km? ______

- **Escriban en su cuaderno un párrafo en el que expliquen cuál de las opciones iniciales conviene más y por qué. Comparen su decisión con sus compañeros y valídenla con ayuda de su profesor.**

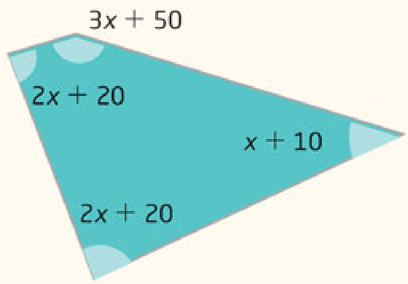
Reviso mi trayecto

Resuelve los problemas. Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Toma nota de los contenidos que necesitas repasar.

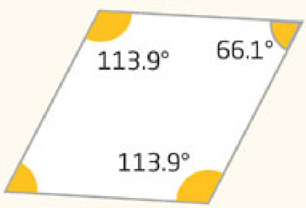
1. **Completa la tabla. Anota tus operaciones en el recuadro.**

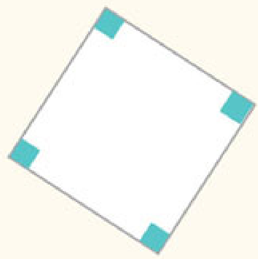
Suma de los ángulos internos	3 600°	2 340°
Lados del polígono		

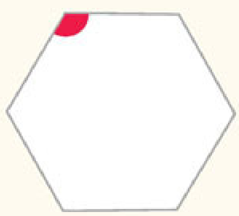
2. **Calcula la medida de cada ángulo interno del cuadrilátero.**

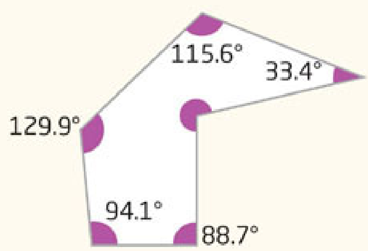


3. **Encuentra la medida de los ángulos faltantes y el número de diagonales que tiene cada polígono.**









Valoro mis fortalezas

Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Con base en los resultados que obtengas, retoma los contenidos que se te dificultaron.

1. **Si el área de un rectángulo es de $\frac{1}{2}$ m^2 y la base mide $\frac{1}{3}$ de m, ¿cuánto mide la altura? Escribe 3 pares de valores de base y altura para la misma área.**

2. **Un número A se multiplica por 0.7.**

a. ¿El resultado es mayor o menor que el número A? ______

b. ¿Cómo es el resultado si se multiplica el número A por 1.08? ______

3. **Se tienen 17 paquetes de un cuarto de kilogramo de azúcar morena, y se quiere armar paquetes de $\frac{1}{5}$ de kg.**

a. ¿Para cuántos paquetes alcanza? ______

b. ¿Sobra o falta azúcar? ¿Cuánta? ______

4. **Una célula mide 2.7×10^{-4} mm. ¿Qué longitud ocuparían un millón de células colocadas una junto a la otra?**

5. **La velocidad de la luz es 3×10^{8} m/s. Si el Sol se encuentra a 1.5×10^{11} m de la Tierra, ¿cuántos segundos tarda en llegar la luz del Sol a la Tierra?**

6. **Paulina hará adornos para el festival de matemáticas de su escuela. Observa la secuencia de las figuras de los adornos y responde.**

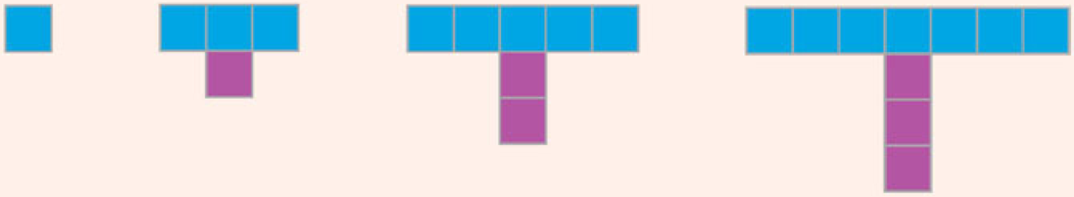


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

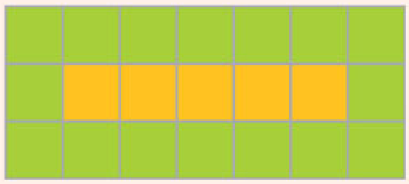
a. Escribe la expresión general para el número de cuadros azules. ____________

b. Escribe la expresión general para el número de cuadros morados. ____________

c. Escribe la expresión general para el número total de cuadros para la figura *n*. ____________

d. Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes a la del inciso anterior. ____________

7. **Un piso tiene arreglos de baldosas formadas por cerámicas amarillas y verdes, como se muestra en la imagen:**



a. ¿Cuántas baldosas verdes se necesitarían si se tuvieran 1 000 baldosas amarillas? ____________

b. ¿Qué expresión representa el total de baldosas para cualquier cantidad de arreglos? ____________

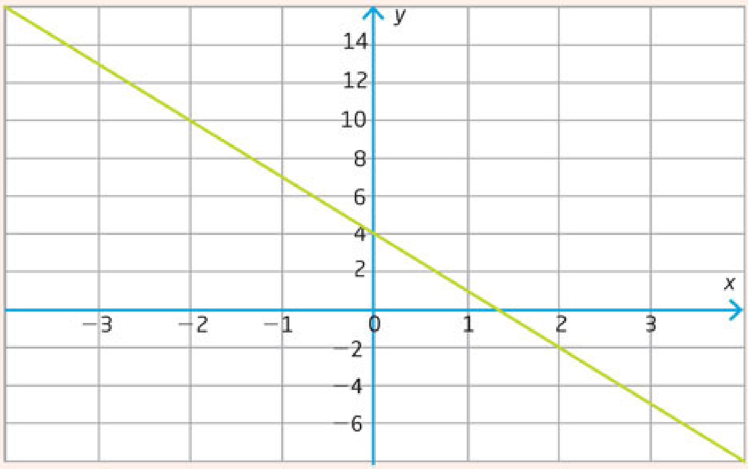
c. Escribe una expresión equivalente a la del inciso anterior. ____________

8. **Resuelve los problemas. Escribe tus operaciones en los recuadros.**

a. En un estacionamiento hay 60 vehículos, entre coches y motocicletas. Si en total hay 160 ruedas, ¿cuántos coches y cuántas motocicletas hay?

b. Cada boleto de zona general para una obra de teatro se vendió a $250 y cada boleto de zona preferente, a $1 050. En la primera noche de la función se vendieron 170 boletos y en total se obtuvieron $100 100. ¿Cuántos boletos de zona general y cuántos de zona preferente se vendieron? ¿Cuánto dinero se obtuvo de la venta de boletos de zona general y cuánto de la venta de boletos de zona preferente?

9. La gráfica corresponde a un sistema de dos ecuaciones lineales.



a. Escribe dos ecuaciones lineales que corresponden a dicha gráfica. ____________

____

b. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ____________________

10. Trescientas personas que estaban en un albergue tenían provisiones para comer 90 días. A los 20 días se fueron 50 personas. ¿Cuánto tiempo durarán las provisiones en el albergue si se consumen a la misma razón?

Trimestre 2

En este trimestre:

- Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.
- Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpretarás y resolverás problemas que se modelan con estos tipos de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
- Deducirás y usarás las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
- Calcularás el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
- Recolectarás, registrarás y leerás datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.
- Determinarás la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Arquitectura y arte contemporáneo

La arquitectura se ha inspirado y apoyado en las matemáticas para diseñar y construir edificios hermosos. Un ejemplo de lo anterior es la catedral de Notre Dame, en París, Francia, en cuyas dimensiones se aplica la **divina proporción** descrita por los matemáticos griegos.

Otro recurso geométrico utilizado en el diseño de edificios es el de los **teselados**, es decir, patrones de figuras geométricas que cubren una superficie plana sin dejar espacios ni sobreponerse unas a otras.

En la Ciudad de México se pueden observar los teselados en edificios como el Kiosco Morisco y el museo Soumaya, entre otros.

¿Qué otros edificios conoces en los que se usen teselados?

La fachada del edificio Soumaya, en la Ciudad de México, se encuentra cubierta por hexágonos que forman un teselado.

Secuencia didáctica

17

Multiplicación y división de números positivos y negativos

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Lección 1

Operaciones con fracciones positivas y negativas

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee el problema y responde. Anota las operaciones y explica tu respuesta.

En un laboratorio hay 4 recipientes. Cada uno se llena o vacía por medio de pequeñas mangueras de manera constante durante tres horas para un experimento de química. Los cambios son los siguientes:

- El líquido del recipiente A cambia a una razón de $-\frac{3}{4}$ de L/h.
- El del recipiente B, a una razón de $-\frac{10}{3}$ de L/h.
- El del recipiente C, a una razón de $2\frac{1}{6}$ de L/h.
- El del recipiente D, a una razón de $-\frac{4}{54}$ de L/h.

a. ¿Durante esa primera hora, el líquido en el recipiente A aumentó o disminuyó? Explica. ____________________

b. ¿Qué sucederá con el líquido del recipiente B en los primeros $\frac{3}{4}$ de h del experimento? ____________________

____

____

c. ¿Qué sucederá con el líquido del recipiente C en la primera media hora del experimento? ____________________

____

d. ¿Qué sucederá con el líquido del recipiente D cuando hayan transcurrido $2\frac{1}{4}$ de h del experimento? ____________________

____

____

e. ¿Qué operaciones debes realizar para saber cuál fue el cambio por hora, medido en litros, en cada recipiente? Escríbelas y resuelve.

- **Comenta con tus compañeros qué características especiales tienen los factores y los signos de estas operaciones. Comparen sus respuestas y sus procedimientos.**

Multiplicación y división de fracciones

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Observa las operaciones y responde.**

- $\left(\frac{3}{8}\right) \div \left(-\frac{3}{4}\right) =$
- $\left(-1\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{4}{4}\right) =$
- $\left(-\frac{2}{6}\right) \times (2) =$

a. ¿En qué se diferencian estas operaciones de las operaciones con fracciones que resolviste en secuencias anteriores? ______________________________

____

b. ¿Qué tienen en común con las operaciones del problema de los recipientes? ____

____

c. Las leyes de los signos pueden aplicarse a números fraccionarios ¿Por qué? ____

____

Las **leyes de los signos** para números enteros pueden aplicarse para números fraccionarios:
Al multiplicar o dividir dos fracciones positivas o dos negativas, el resultado será positivo.
Al multiplicar o dividir dos fracciones, una positiva y otra negativa, el resultado será negativo. Ejemplos:

a. $\left(\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)$
b. $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{6}\right)$
c. $\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{6}\right)$
d. $\left(-\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)$

- **Retoma las operaciones anteriores y resuélvelas en tu cuaderno. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y validen con el profesor.**

Practicar para avanzar

1. Resuelve.

a. $\left(-\frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{6}\right) =$
b. $\left(-\frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) =$
c. $(2) \times \left(-\frac{3}{4}\right) =$
d. $\left(-\frac{4}{6}\right) \times (-3) =$
e. $(3) \div \left(-3\frac{1}{4}\right) =$
f. $\left(2\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{8}\right) =$

2. Resuelve el problema en tu cuaderno.
Supón que para el problema inicial hay un recipiente E, cuyo contenido varía $-3\frac{3}{4}$ de L/h cada 2 h.

a ¿Cuánto cambiará la cantidad de líquido cada hora?
b. ¿Cada media hora aumenta o disminuye el líquido de ese recipiente? ¿Cómo lo sabes?

Lección 2

Operaciones con decimales positivos y negativos

1. **Lee el problema.**

Pablo debe al banco cierta cantidad de dinero y eligió un programa de pago a 6 plazos en que le cobrarán intereses y comisiones. Observa los datos que le da el cajero:
Su saldo inicial es de −$3 550.25.
Una vez que acepte el programa de pago a plazos, su saldo será de −$4 260.30.

a. ¿Qué representa la división (−4 260.30) ÷ (−3 550.25)? ______

______

b. ¿Qué representa la división (−4 260.30) ÷ (6)? ______

______

c. ¿Qué diferencia encuentras entre estas operaciones y las que trabajaste con decimales en secuencias anteriores? ______

______

d. ¿Qué similitud encuentras entre estas operaciones y las que has trabajado en esta secuencia, por ejemplo, las de los recipientes? ______

______

______

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y analicen cómo se pueden resolver las operaciones.**

2. **Resuelve las operaciones y responde.**

- $(-0.25)\,(-1) =$ ______
- $(-812.5) \div (6.5) =$ ______
- $0.3 \div 0.3 =$ ______
- $(-0.75) \div (\frac{1}{4}) =$ ______
- $(-2) \div (-0.5) =$ ______
- $(2\frac{1}{2}) \div (-\frac{1}{8}) =$ ______

a. Cuando se multiplica una cantidad por un número decimal menor que 1, ¿el resultado es menor que la cantidad inicial? ¿De qué depende? ______

______

b. Cuando se multiplica una cantidad por un número menor que cero, ¿el resultado es menor que la cantidad inicial? ¿De qué depende? ______

______

Las **leyes de los signos** también se aplican al multiplicar o dividir números decimales positivos y negativos.

3. **Escribe tres multiplicaciones o divisiones con números decimales y resuélvelas. En cada una debe haber al menos un factor menor que cero y en dos de ellas el resultado debe ser menor que cero.**

a. ______

b. ______

c. ______

- **Comparte con tus compañeros tus respuestas y, si tienen dudas, coméntenlas con su profesor.**

Aplica lo que aprendiste.

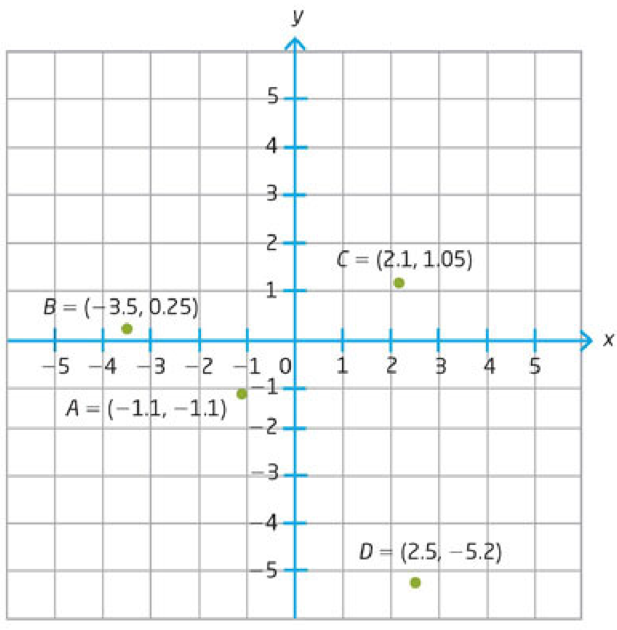
PUNTO DE LLEGADA

1. **Resuelve. Escribe tus operaciones y tu respuesta en el recuadro.**

Se va a diseñar una alberca en un nuevo centro deportivo. El ingeniero dice que el fondo en una orilla debe estar a $-1\frac{1}{4}$ de m con respecto al suelo, y del otro lado a -2 m. El dueño del centro deportivo le dice que, por ahorro de material, la deben hacer de $\frac{3}{4}$ partes de la profundidad planeada. ¿A qué altura con respecto del suelo debe quedar el piso de la alberca en ambas orillas?

2. **Observa el plano cartesiano y haz lo que se pide.**

En el plano cartesiano se pueden escalar los puntos multiplicando las coordenadas por un número. Por ejemplo, para aplicar una escala 2:1, es decir, el doble, basta con multiplicar las coordenadas de un punto (x, y) por 2. Entonces el nuevo punto es $(2x, 2y)$.



a. Se quieren localizar los puntos generados al multiplicar los puntos ubicados en el plano para obtener una escala de 1.1:1. Calcula y ubica los puntos en el plano.

b. Observa los puntos (0.22,0.22), (0.7, −0.5), (−0.42,−0.21), (−0.5, 1.04). En tu cuaderno, realiza las operaciones necesarias para saber qué escala se aplicó a los puntos del plano original para obtenerlos.

- **Compara tus respuestas con tus compañeros y escriban una conclusión en su cuaderno sobre cómo multiplicar fracciones y decimales, positivos y negativos.**

Secuencia didáctica

18

Potencias de fracciones y decimales

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.

Lección 1

Números fraccionarios con signo

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee la situación y responde.

La base de una caja de cartón es cuadrada y mide $\frac{3}{4}$ de m de lado.

a. Anota una expresión que represente el área de la base de la caja. ____________

b. Escribe dos expresiones para representar el volumen de la caja.

Expresión 1: ____________ Expresión 2: ____________

c. Compara las expresiones que escribiste con las de dos compañeros y analicen sus diferencias.

- **Comenta tus respuestas con tu profesor y anota tus conclusiones.**

Potencia de números fraccionarios

TRAYECTO FORMATIVO

1. Analiza la potencia y contesta.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

a. Escribe la potencia como una multiplicación repetida. ____________

b. En secuencias anteriores aprendiste a multiplicar fracciones. Resuelve la multiplicación y anota tus operaciones en el recuadro.

c. ¿A qué exponente hay que elevar el numerador original para obtener el numerador obtenido? ____________

- ¿Y el denominador? ____________

d. Escribe la fracción con el numerador y el denominador como potencias para completar la siguiente igualdad.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{\square^{\square}}{\square^{\square}}$$

e. Aplica el procedimiento anterior con las siguientes potencias.

- $\left(\frac{3}{5}\right)^4 =$ ____________
- $\left(\frac{6}{7}\right)^5 =$ ____________

Para **elevar una fracción a un exponente,** se elevan tanto el numerador como el denominador a dicho exponente. Es decir, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

2. Resuelve y analiza las potencias y contesta.

$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 =$ ______________________ $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 =$ ______________________

a. ¿Cómo será el signo del resultado de cada una de las potencias anteriores? Justifica tu respuesta.____

____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y con el profesor. Luego lee el siguiente texto y escribe tus conclusiones.**

Las fracciones elevadas a una potencia conservan las reglas de exponentes que aprendiste para números enteros elevados a potencias.

Practicar para avanzar

1. Resuelve las siguientes potencias. Anota las operaciones y resultados.

a. $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 =$

b. $\left(\frac{3}{2}\right)^4 =$

c. $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 =$

d. $\left(\frac{1}{-6}\right)^2 =$

2. Observa las siguientes potencias y responde.

a. $\left(\frac{-3}{2}\right)^2 =$

b. $-\left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

c. $-\frac{3^2}{2} =$

d. $\left(\frac{3}{-2}\right)^2 =$

- ¿Las potencias de los incisos *b* y *c* son las mismas? Explica tu respuesta. ______________

____

____

- Calcula cada una de las potencias y describe qué las hace diferentes entre sí, a pesar de tener mismo numerador, mismo denominador y mismo exponente. Anota tus conclusiones.

____

____

Compara tus resultados con los de tus compañeros y concluyan en grupo sobre la importancia de los paréntesis en el uso de signos y potencias.

Lección 2

Potencia de números decimales con signo

1. Lee y contesta.

Paola tiene invertido su dinero en un banco, de manera que cada año, por los intereses, se multiplica por un factor de 1.15.

a. Escribe la multiplicación que debe resolverse para saber cuánto dinero tendrá después de 3 años. ______

- ¿Y después de 6 años? ______

b. Escribe las multiplicaciones anteriores como potencias. ______

______

2. Resuelve las potencias y contesta.

$(-7.25)^2 =$ ______ $(7.25)^2 =$ ______

a. ¿Qué signo tendrá el resultado de cada una? Justifica tu respuesta. ______

______

b. ¿Cuál de las dos potencias puede representar un problema de cálculo de área y por qué? ______

______

______

- **Comenta con un compañero qué signo tienen los resultados obtenidos con respecto a los factores multiplicados. Después lean el siguiente párrafo.**

> Los números decimales mantienen las mismas reglas de exponentes y los signos que los números fraccionarios y los números enteros.

Potencias de decimales y fracciones

3. Observa la siguiente potencia y resuelve.

$$(0.\overline{66})^3$$

a. ¿Qué diferencia encuentras entre esta y las potencias del problema anterior?

______

______

b. ¿Puedes calcularla como una multiplicación repetida? Explica tu respuesta.

______

______

______

Para **elevar un número decimal periódico a un exponente,** es necesario hacer una aproximación, ya sea redondeando o truncando el número. Otra manera de resolverla es convirtiendo el número a fracción. Por ejemplo:

$(0.\overline{77})^3 \approx (0.78)(0.78)(0.78)$ $\quad$ $(2.\overline{02})^2 \approx (2.02)(2.02)$ $\quad$ $(0.\overline{33})^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

4. **Reúnete con un compañero y resuelvan las potencias.**

a. $(0.\overline{09})^4 =$ ____________________

b. $(0.025)^3 =$ ____________________

c. $(0.23\overline{7})^2 =$ ____________________

5. **Resuelve las potencias. Anota tus operaciones y tus resultados.**

a. $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 =$ ____________________ b. $\left(-1\frac{3}{4}\right)^4 =$ ____________________

c. $(-1.75)^2 =$ ____________________ d. $\left(\frac{8}{5}\right)^4 =$ ____________________

e. $(-1)\left(\frac{3}{4}\right)^4 =$ ____________________ f. $-(1.75)^2 =$ ____________________

- **Revisa tus resultados con el resto del grupo. Si hay errores o diferencias, coméntenlos con su profesor.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Reúnete con un compañero y resuelvan en su cuaderno el problema.**

Al comparar la cantidad de habitantes en dos comunidades, observamos que:

- La población de la comunidad A cambia de manera que cada año es 96% de la del año anterior.
- La población de la comunidad B cambia de manera que cada año es la del año anterior multiplicada por $1\frac{1}{5}$.

a. ¿Qué factor hay que multiplicar por la población de la comunidad A para saber cuánto aumentará en los siguientes 2 años?

b. ¿Qué factor hay que multiplicar por la población de la comunidad B para saber cuánto aumentará en los siguientes 4 años?

c. ¿Cómo tendrían que ser las poblaciones iniciales entre sí para que después de tres años haya aproximadamente el mismo número de habitantes en ambas?

d Calculen la cantidad final de pobladores de ambas comunidades después de haber transcurrido 5 años, si las poblaciones iniciales eran de:

- Población comunidad A: 10 000 habitantes
- Población comunidad B: 5 000 habitantes

- **Comparen sus respuestas con las de las demás parejas y comenten sus conclusiones con el profesor.**

Potencia de potencias

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.

Lección 1 Multiplicación de potencias por sí mismas

PUNTO DE PARTIDA

1. **Lee el problema y responde.**

Un estudio de epidemiología muestra que cierta enfermedad se propaga de manera que cada dos días se duplica el número de contagiados. Por lo aprendido en secuencias anteriores, podemos escribir que hay 2^4 personas contagiadas después de 4 periodos de 2 días.

a. Expresa la cantidad de contagiados que hay después del doble de periodos. ____

____

- ¿De qué otra manera puedes expresar esa cantidad? ____________________
- ¿Son equivalentes las expresiones? ¿En qué se diferencian? Explica tu respuesta. ____________________

____

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten las diferencias.**

Potencias positivas

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Analiza la potencia y completa su desarrollo. Después contesta.**

$$
\begin{aligned}
(5^2)^3 &= 5^2 \times \square^{\square} \times \square^{\square} \\
&= (5 \times 5) \times (\_\_\_\_\_) \times (\_\_\_\_\_) \\
&= 5 \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \\
&= 5^{\square}
\end{aligned}
$$

a. Escribe mediante qué operación se relacionan los exponentes de la primera potencia y el exponente de la potencia resultante. ____________________

____

- **Validen sus respuesta en grupo y comenten la relación que encontraron entre los exponentes con ayuda del profesor.**

2. **Escribe el desarrollo de la siguiente potencia. Recuerda el procedimiento del ejercicio anterior.**

$$
\begin{aligned}
(2^4)^2 &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\
&= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\
&= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\
&= \square^{\square}
\end{aligned}
$$

a. Escribe qué relación guardan los exponentes de la primera potencia con el exponente de la potencia resultante. ______________________

____

- **Compara tus conclusiones con las de un compañero. Después valídenlas con ayuda de la siguiente información.**

Cuando un número o base está elevado a un exponente *m*, y la potencia formada está elevada al exponente *n*, se tiene una **potencia de potencias.**

$$(a^m)^n = (a)^{(m \times n)}$$

3. Escribe las expresiones como la base con una sola potencia y resuélvelas. Valida tus respuestas utilizando una calculadora.

a. $(2^5)^3 =$ ______________________

b. $(8^2)^2 =$ ______________________

c. $(1^8)^4 =$ ______________________

d. $(5^1)^3 =$ ______________________

e. $(7^3)^1 =$ ______________________

f. $(12^1)^1 =$ ______________________

Practicar para avanzar

1. Resuelve el problema.

En un laboratorio experimental, cada especie de célula triplica la cantidad de tipos de mezclas que pueden generarse, de manera que al colocar juntas 4 células pueden generarse 3^4 mezclas de estas. Cada mes que transcurre se triplican a su vez las mezclas posibles.
Si se colocan 4 células y transcurren 4 meses.

a. ¿Cuántas posibles mezclas se generarán? ______________________

b. ¿De cuántas maneras puedes expresarlo? ______________________

c. Exprésalo como una potencia. Anota tus operaciones y tus respuestas.

Compara tus respuestas con las de dos compañeros, discutan si hay alguna diferencia en ellas y aclárenla.

Lección 2 Potencias mayores y menores que cero

1. Observa las expresiones y responde.

$(2^{-4})^{-5} =$ ______________________ $(3^{3})^{-3} =$ ______________________

$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{7}\right)^{4} =$ ______________________ $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right)^{-1} =$ ______________________

a. ¿Qué características tienen en común las potencias mostradas y las trabajadas en la lección anterior? ______________________

____

b. ¿Qué característica o características diferentes tienen las potencias en relación con las trabajadas en la lección anterior? ______________________

____

c. ¿Qué operación u operaciones se necesitan para escribir cada potencia con un solo exponente? ______________________

____

d. Analiza el signo de los exponentes de las potencias y, con base en lo que has aprendido, explica qué sucede cuando ambas potencias son negativas. ______________________

____

____

e. Resuelve las potencias.

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten si hubo alguna diferencia. Concluyan con su profesor cuál fue la respuesta correcta y corrijan si es necesario.**

Cuando ambos exponentes son negativos, entonces $(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)\times(-n)} = a^{m\times n}$, ya que el producto de dos números negativos es un número positivo.

Herramientas académicas

1. Resuelve con tu calculadora.

$(2^{-4})^{-5} =$ ______________________ $(3^{3})^{-3} =$ ______________________

a. Escribe en orden las teclas que utilizaste para resolver las potencias. ______________________

____

____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y analicen cuál es la forma correcta de ingresar las operaciones en la calculadora. Luego validen con su profesor.

Aplica lo que aprendiste y responde.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Resuelve las potencias y haz lo que se pide.**

$(7)^{(2\times3)} =$ __________ $(5^2)^3 =$ __________

$(2^{-2})^{-2} =$ __________ $(2 \times 2 \times 2 \times 2) =$ __________

$(7^3)^2 =$ __________ $(4 \times 4 \times 4)^2 =$ __________

$(5^3)^2 =$ __________ $(1^7)^2 =$ __________

$4^6 =$ __________ $1^9 =$ __________

a. Encuentra cuáles expresiones dan el mismo resultado y escríbelas a continuación. Utiliza el signo = entre ellas.

b. Escribe una expresión equivalente para aquellas expresiones que no la tuvieron.

c. Elige dos expresiones, las que quieras, y encuentra algún contexto que pueda representar cada una. Describe las situaciones en tu cuaderno.

d. Expón a tu grupo el contexto que diseñaste. ¿Algún compañero eligió la misma potencia o una equivalente? ¿Eran distintos los contextos? ¿Se parecen en algo? En tu cuaderno escribe por qué.

e. ¿Las expresiones encontradas en el inciso *b* fueron iguales a las de tus compañeros? ¿Por qué? Identifiquen las diferencias y similitudes.

- Si se expresan como una potencia de una sola base y un solo exponente, ¿deben ser iguales? Explica tu respuesta. __________

____

- **Comenta con tus compañeros si tuviste alguna duda durante esta actividad o esta secuencia. De ser así, resuélvanla con ayuda de su profesor.**

Secuencia didáctica

20

Las leyes de los exponentes

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.

Lección 1

Verdadero o falso

PUNTO DE PARTIDA

1. **Analiza las igualdades y encierra aquellas que se cumplan. Utiliza tu calculadora para confirmar tus respuestas, como se muestra en la página 40.**

$2^3 + 2^3 = 2^{3+3}$ $\quad$ $(2 + 2)^3 = (2 \times 2)^3$ $\quad$ $2^3 + 2^3 = 2^{3 \times 3}$

$2^3 \times 2^3 = 2^{3+3}$ $\quad$ $2^3 \times 2^3 = 2^{3 \times 3}$

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y justifíquenlas.**

Más leyes de los exponentes

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Retoma las igualdades. Sustituye los números en rojo por otros y analiza cuáles se siguen cumpliendo y por qué. Justifica en el recuadro aquellas que se cumplan.**

a. Subraya la expresión que exprese las igualdades que se cumplen para cualquier valor de las literales.

$a^n + a^m = a^{n+m}$ $\quad$ $a^n + a^m = a^{n \times m}$ $\quad$ $a^n \times a^m = a^{n+m}$ $\quad$ $a^n \times a^m = a^{n \times m}$

2. **Escribe "verdadero" o "falso" según corresponda a cada igualdad y responde.**

$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^4$ ____________

$(2^3)^4 = (2^4)^3$ ____________

$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4}$ ____________

a. Demuestra las afirmaciones verdaderas.

b. Escribe con literales la generalización de las igualdades verdaderas anteriores.

____

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Multiplicación y división

3. **Anota en cada renglón si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Usa la calculadora para confirmar tus resultados.**

$$\frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} \quad \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\frac{2^6}{2^3} = 2^{\frac{6}{3}} \quad \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\frac{2^6}{2^3} = 2^{6+3} \quad \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\frac{2^6}{2^3} = 2^6 - 2^3 \quad \underline{\hspace{5cm}}$$

a. Demuestra las igualdades que se cumplan.

4. **Completa la siguiente ley de los exponentes.**

$$\frac{a^n}{a^m} =$$

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Después, lee la siguiente información y revisa que las expresiones anteriores sean correctas.**

Las principales **leyes de los exponentes** son las siguientes. Considera que $a \neq 0$.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\quad$ $(a^m)^n = a^{m \times n}$ $\quad$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Practicar para avanzar

1. Resuelve los siguientes grupos de potencias y escribe la ley de los exponentes que se aplica en cada uno.

a. $(x^2)(x^3)(x^4) =$ __________ $\quad$ $(2^a)(2^b)(2^c) =$ __________

$(x^x)(x^x)(x^x) =$ __________ $\quad$ $(3^{m-1})(3^{2m+3})(3^{2-3m}) =$ __________

La ley de los exponentes que se aplica es: __________

b. $(x^4)^5 =$ __________ $\quad$ $(4^x)^5 =$ __________

$(m^4)^x =$ __________ $\quad$ $(x^x)^x =$ __________

La ley de los exponentes que se aplica es: __________

c. $\frac{x^{15}}{x^5} =$ $\quad$ $\frac{2^{x+3}}{2^x} =$ $\quad$ $\frac{p^{3x-5}}{p^{2x-1}} =$

La ley de los exponentes que se aplica es: __________

Lección 2 Otras leyes de los exponentes

1. Calcula y determina cuáles de las siguientes igualdades se cumplen. Confirma tus resultados con tu calculadora. Después contesta.

$(2 \times 5)^3 = 2 \times 5^3$ ____________

$(2 \times 5)^3 = 2^3 + 5^3$ ____________

$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$ ____________

$(2 + 5)^3 = 2^3 + 5^3$ ____________

$(6 - 4)^3 = 6^3 - 4^3$ ____________

$2^3 \times 3^2 = 6^5$ ____________

$2^3 \times 3^2 = 6^6$ ____________

a. Demuestra las afirmaciones que sean verdaderas. ____________

____

b. Completa la expresión para representar las igualdades que se cumplen.

$(a \times b)^n =$ ____________

2. Escribe "verdadero" o "falso", según corresponda a cada igualdad y responde. Usa la calculadora para confirmar tus resultados.

$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3}$ ____________

$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2}$ ____________

$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{3^5}{3^2}$ ____________

a. Demuestra las afirmaciones que sean verdaderas. ____________

____

b. Completa con literales la siguiente ley de los exponentes.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ ____________

3. Sustituye, en la ley de los exponentes $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, los valores $a = 2$, $m = 5$ y $n = 5$. Resuelve ambos lados de la igualdad y responde.

a. ¿Cuál es el resultado de una división cuando el numerador y el denominador son iguales? ¿Por qué? ____________

____

____

____

- **Discute con tus compañeros y con tu profesor cuál es el resultado de elevar cualquier número a una potencia cero.**

4. Resuelve las potencias y contesta. Utiliza fracciones de ser necesario.

$2^4 =$	16	$3^4 =$	81
$2^3 =$	8	$3^3 =$	27
$2^2 =$		$3^2 =$	
$2^1 =$		$3^1 =$	
$2^0 =$		$3^0 =$	
$2^{-1} =$		$3^{-1} =$	
$2^{-2} =$		$3^{-2} =$	
$2^{-3} =$		$3^{-3} =$	
$2^{-4} =$		$3^{-4} =$	

a. Observa las secuencias de potencias. ¿Qué sucede con el resultado cuando se resta 1 al exponente? ______

b. ¿Continúa siendo cierto lo anterior cuando los exponentes son negativos? Justifica tu respuesta. ______

______

c. En tu cuaderno, construye otra secuencia de potencias similar a las anteriores con base 4 y contesta.

d. ¿Cuál es el resultado de elevar cualquier número a una potencia 1? ______

______

5. Con base en el ejercicio anterior, contesta.

a. ¿Cuál es el resultado de elevar un número diferente de cero al exponente cero?

______

Observa que, como se cumple que $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, entonces 0^0 se puede escribir como 0^{1-1}, que es igual a $\frac{0}{0}$. Sin embargo, $\frac{0}{0}$ está **indeterminado**, es decir, no tiene resultado, pues no se puede dividir entre 0. Por tanto, 0^0 también está indeterminado.

- **Comparte con tus compañeros tus resultados. Verifiquen que sean iguales las leyes de los exponentes que escribieron y, de no ser así, identifiquen el por qué de las diferencias con ayuda de su pofesor.**

6. Resuelve los siguientes ejercicios aplicando las leyes de los exponentes. Escribe todo tu procedimiento y convierte los resultados que contengan exponentes negativos a expresiones con exponentes positivos.

Ejemplo: $\frac{(3x)^{-2}}{x^{-6}} = \frac{3^{-2}x^{-2}}{x^{-6}} = \frac{x^6}{3^2x^2} = \frac{x^4}{9}$

- $(x^{-3})(x^{-4}) =$ ______
- $(2^{-m})(2^{-p}) =$ ______
- $(2x)^3 =$ ______
- $(2x)^{-3} =$ ______
- $(3x^{-2}y^{-4})^5 =$ ______
- $(x^3)^{-5}(x^{-5})^3 =$ ______
- $\dfrac{x^{-3}}{x^{-5}} =$ ______
- $\dfrac{(2x)^{-4}}{(2x)^{-7}} =$ ______

- **Valida tus respuestas con ayuda de tus compañeros y tu profesor. Después lean la siguiente información.**

En la secuencia 5 aprendiste a manejar exponentes negativos usando las siguientes identidades:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^n \qquad \text{con } a \neq 0$$

Las leyes de los exponentes se aplican de la misma manera, aunque las potencias contengan exponentes negativos.

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Formen parejas y escriban todas las leyes de los exponentes estudiadas, con un ejemplo para cada una.**

Ley de los exponentes	Ejemplo

- **En grupo revisen si escribieron todas las leyes de los exponentes trabajadas y si los ejemplos fueron correctos. Si no es así corrijan la tabla.**

Reviso mi trayecto

Resuelve los problemas. Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Toma nota de los contenidos que tienes que repasar.

1. Marca V o F en el recuadro según corresponda a las afirmaciones. Justifica tus respuestas y corrige las expresiones que no sean correctas.

Expresión algebraica	V	F	Corrección	Justificación
$\frac{1}{4} \times -\frac{1}{8} = -\frac{8}{4}$				
$-\frac{1}{4} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{16}$				
$\frac{3}{4} \div -0.5 = -\frac{3}{2}$				
$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^5}{b^2}$				
$\frac{4x^{-4}y^5}{2x^3y^{-1}} = \frac{2x^{-1}y^7}{y}$				

2. Resuelve.

a. $4.5 \div (-6) =$ ____________ b. $(3^{-m})^2\,(3^{-n})^3 =$ ____________

c. $(-3.2)\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) =$ ____________ d. $\frac{x^{-4}}{x^{-3}} =$ ____________

3. Responde.

a. ¿Qué número debes multiplicar por -0.25 para obtener 1? ____________

b. Si multiplicas tres números y obtienes $-\frac{3}{4}$ como resultado, ¿cuáles pueden ser los números? ¿Y si el resultado es $\frac{3}{4}$? Encuentra al menos tres respuestas distintas para cada caso. ____________

____

____

c. Un número dividido por 0.5 y multiplicado por $-\frac{1}{4}$ da $-\frac{1}{10}$. ¿Cuál es el número?

____

____

Secuencia didáctica

21

Expresiones algebraicas

Aprendizaje esperado: Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

Lección 1

Producción de basura en México

PUNTO DE PARTIDA

1. En parejas, lean la información y hagan lo que se pide.

Las actividades productivas del ser humano generan residuos. La gran mayoría de estos tienen efectos negativos en la salud de la población y deterioran el medioambiente.

Uno de los residuos sólidos más comunes que genera el ser humano es la basura. En 2015 la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat) estimó que, en promedio, una persona adulta genera 1.2 kg de basura al día.

Fuente: http://apps1.semarnat.gob.mx/dgeia/informe15/tema/cap7.html (consulta: 13 de junio de 2018)

a. Comenten este tema y escriban cómo pueden ayudar a solucionar el problema.

___

___

___

___

b. Supongan que un menor genera la mitad de basura que un adulto. Calculen la cantidad de basura que genera en una semana...

- Un adulto: ___
- Un menor: ___
- Un adulto y un menor: ___

c. Escriban una expresión algebraica que represente la cantidad de basura que genera en *x* días...

- Un adulto: ___
- Un menor: ___
- Un adulto y un menor: ___

- **Comenten con sus compañeros sus respuestas y validen con su profesor las expresiones obtenidas.**

Simplificación de expresiones

TRAYECTO FORMATIVO

1. A partir de la información anterior, escriban una expresión para representar cuánta basura genera cada familia en *x* días y simplifíquenlas.

a. Dos niños, su mamá y su abuela. ___

b. Un niño, su papá y su mamá. ___

c. Un niño, su mamá y sus dos abuelos. ___

En las expresiones anteriores hay **términos semejantes**. Cada término tiene la variable x. Los coeficientes de estos términos (los números que los acompañan) se pueden operar para reducir la expresión y tener menos términos. De esta manera obtenemos una expresión equivalente. Por ejemplo:

$$1200x + 1200x + 600x + 600x = 3600x$$

2. Retomen las expresiones del ejercicio anterior y completen la tabla.

a. ¿Cuánta basura generan las familias del ejercicio anterior en una semana, en un mes, en un año? Usen las dos expresiones y escriban las respuestas en kg.

Una semana		Una mes		Una año	
Expresión original	Expresión simplificada	Expresión original	Expresión simplificada	Expresión original	Expresión simplificada

- ¿Cómo son los resultados? ¿Por qué? __________

3. En 1950, en México, un adulto producía en promedio por día $\frac{1}{4}$ de basura que en 2015.

a. Escribe una expresión que dé la cantidad de basura generada, en promedio, por un adulto, en esa época. __________

b. Supongan que un menor generaba la mitad de basura que un adulto en 1950. ¿Qué expresión algebraica representa la cantidad de basura generada por un menor de edad en 1950? __________

c. ¿Cuánta basura generaría una familia como las anteriores? __________

Los términos semejantes son aquellos en los que coinciden las literales o variables y sus exponentes, es decir, su parte **literal**. Por ejemplo:

$\frac{1}{8}, -9, 0.75, \sqrt{2}$ $\quad x, 2.5x$ $\quad 3vt^3, \sqrt{2}vt^3$ $\quad x^2, 2x^2$

En los siguientes ejemplos, se muestran términos donde no coinciden las literales y los exponentes, y por tanto, no son términos semejantes.

$3, 5x, 7$ $\quad x, \frac{1}{4}y$ $\quad 07vt, 5vt^2$ $\quad x^2, -2.5z^2$

Lección 2 Más de expresiones algebraicas

1. Haz lo que se pide para representar cada una de las siguientes situaciones.

a. En un estacionamiento hay automóviles y bicicletas. Si el número de automóviles lo representamos con a y la cantidad de bicicletas con b, escribe dos expresiones que representen cuántas ruedas hay en total.

- Expresión algebraica 1. ____________________
- Expresión algebraica 2. ____________________

b. En una bolsa hay bolas blancas y bolas negras. La cantidad de bolas negras es mayor en 10 al de bolas blancas. Escribe dos expresiones que representen la cantidad de bolas blancas y bolas negras de la bolsa.

- Expresión algebraica 1. ____________________
- Expresión algebraica 2. ____________________

c. Escribe dos expresiones para representar el precio final de un producto después de aplicarle 16% de IVA.

- Expresión algebraica 1. ____________________
- Expresión algebraica 2. ____________________

d. Escribe dos expresiones que representen la situación: Un número más el doble del mismo número.

- Expresión algebraica 1. ____________________
- Expresión algebraica 2. ____________________

e. Escribe dos expresiones que representen la suma de un número más 10, dividido entre 3.

- Expresión algebraica 1. ____________________
- Expresión algebraica 2. ____________________

f. Reúnete con un compañero y verifiquen que las expresiones que escribieron sean correctas. Si es necesario corrijan.

- **En grupo comenten por qué es necesario saber representar diferentes situaciones mediante una expresión algebraica, qué utilidad tiene hacer la representación y en cuáles de las materias que cursan pueden aplicar lo aprendido.**

2. Lee la siguiente información y coméntala con un compañero.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y operaciones. En estas expresiones, el signo de multiplicación × se sustituye por un punto o se omite. Por ejemplo:

$$2 \times x \times y^2 = 2xy^2$$

Además, suele omitirse el coeficiente de un término o el exponente de una literal cuando es 1. Por ejemplo:

$$1x^3y^2 = x^3y^2 \qquad 3x^1y^3 = 3xy^3$$

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

3. **Completa la tabla con las expresiones que representan lo que se pide.**

	5	y	$\frac{1}{2}y$	y^2	xy
El doble de					
El cuadrado de					
La mitad más 1 de					
El triple más 100 de					

En matemáticas, los términos **más, menos, el doble, el triple, el cuadrado, la mitad**… tienen implicaciones en el momento de construir e interpretar una expresión algebraica.

- **Reúnete con un compañero, comparen sus respuestas y comenten qué implica cada uno de los términos antes mencionados.**

4. **Escribe dos expresiones que representen alguna situación y su significado en palabras:**

   a. En geometría.
   Expresión: ____________________
   Situación: ____________________

   b. En física.
   Expresión: ____________________
   Situación: ____________________

   c. En estadística.
   Expresión: ____________________
   Situación: ____________________

Practicar para avanzar

Realicen las actividades en su cuaderno.

1. Expliquen por qué la expresión $2x-\frac{1}{2}x$ se puede escribir como $\frac{3}{2}x$, pero la expresión $2x-\frac{1}{2}$ no.
2. Escriban una expresión que represente el enunciado y, si es posible, simplifíquenla.
   a. La suma de dos números más el doble del primero.
   b. El cuadrado de un número más el triple de ese número.
   c. El cuadrado de un número más el triple del número menos la mitad de ese número.

Lección 3

Simplificación de términos semejantes y construcción de expresiones equivalentes

1. **Completa la tabla. Analiza si puedes obtener una expresión equivalente. En cada caso afirmativo, identifica los términos semejantes y realiza las operaciones indicadas.**

Expresión algebraica	Se pueden reducir términos semejantes:	Expresión equivalente
$-m + 2mn + 5n + 3mn - 9$		
$-\frac{1}{4}a + 4ab^2 + \frac{3}{5}a - 0.125a$		
$0.5vt + \frac{3}{2}vt + t - 2$		
$-\frac{1}{4}a + 4a + \frac{3}{5}a$		
$-a + \frac{1}{4}a - 0.75a$		
$-\left(\frac{1}{4}a + 4b^2\right) + \left(-\frac{1}{4}a - 4b^2\right)$		
$l + l + l + l$		

2. **Descompón en términos semejantes las siguientes expresiones algebraicas. Considera que la descomposición de términos es el proceso inverso a la simplificación o reducción.**

Expresión algebraica	Expresión equivalente descompuesta
0	
$7mn + \frac{2}{7}m + 1$	
$\frac{1}{9}a$	
$-13x + 7y$	
$-a - 0.75b$	
$5l$	
1	

- **Reúnete con un compañero y escriban cómo pueden simplificar los términos semejantes en una expresión algebraica. Intercambien sus textos con otra pareja para validarlos.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. Escribe las expresiones que representan las siguientes situaciones:

a. Si el precio de un yogur es x y el de una torta es w, el precio de 2 yogures y 3 tortas se puede expresar como.

Expresión: ______________________

b. La tercera parte de un número menos el doble más 1.

Expresión: ______________________

c. El cuadrado de un número menos el triple del mismo número.

Expresión: ______________________

d. El perímetro de un cuadrado de lado l.

Expresión: ______________________

e. En una ciudad de México, el taxi cobra \$20.00 de cuota fija por viaje más \$3.50 por cada kilómetro recorrido.

Expresión: ______________________

Herramientas académicas

Entra a la página www.esant.mx/fasema2-002 e identifica la expresión que representa cada situación.

2. Simplifica o descompón las siguientes expresiones.

a. $3x - 2\frac{1}{3}y + y - x + x^2 + 1 =$ ______________________

b. $3x - 2\frac{1}{3}x + x =$ ______________________

c. $3x^2 - 2\frac{1}{3}x^2 =$ ______________________

d. $3p - 2.5p =$ ______________________

3. Rodea con el mismo color los términos semejantes.

$xy \quad x \quad y \quad xy \quad x^2y \quad \pi x \quad xy^2 \quad 2x \quad \frac{1}{2}x \quad \sqrt{3}x^2$

a. Descompón cada uno de los términos anteriores para generar una expresión equivalente. Completen la tabla.

Término	Descomposición	Término	Descomposición

- **Comenta con tus compañeros por qué es importante saber simplificar y descomponer las expresiones y qué dificultades tuvieron al realizar esta actividad.**

Secuencia didáctica

22 Geometría con álgebra

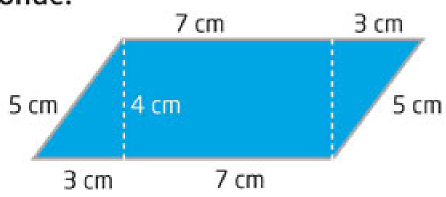
Aprendizaje esperado: Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

Lección 1

Área de cuadriláteros

PUNTO DE PARTIDA

1. Observa la figura y responde.



a. ¿Cómo se llama la figura? ______

b. Escribe las fórmulas para calcular el perímetro y el área.

$A =$ ______ $P =$ ______

c. Si no recordaras las fórmulas del área y el perímetro, ¿cómo podrías obtenerlas?

______

______

d. Calcula el perímetro y área de la figura. ______

- **Comenta con tus compañeros las diferentes formas de calcular el área de la figura y por qué se obtiene el mismo resultado.**

Expresiones equivalentes

TRAYECTO FORMATIVO

1. Supón que no conoces las medidas representadas con la variable *x* en la figura y haz lo que se indica.

a. Calcula el área de los triángulos que se forman en términos de *x*. ______

b. Calcula el área del rectángulo en términos de *x*. ______

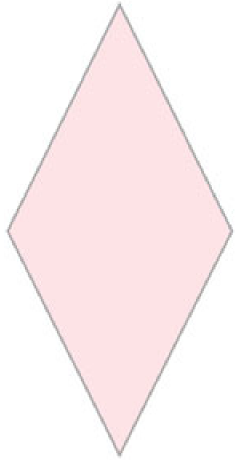
c. Encuentra el área total de la figura. ______

d. Expresa la longitud de la base en términos de *x*. ______

e. Comprueba en tu cuaderno que obtienes el mismo resultado al multiplicar la longitud de la base por la altura que sumando las áreas de los triángulos y el rectángulo.

- **Comparte con tus compañeros tus procedimientos y observa si tus cálculos y simplificaciones son correctos. Sustituye el valor de *x* por 7 y comprueba que obtienes el mismo resultado que en la actividad anterior con ambas expresiones.**

2. **Observa el rombo y haz lo que se pide.**



a. Traza la diagonal menor para formar dos triángulos, cada uno con una base de 10 cm y altura de $3x - 2$ cm. Calcula el área de cada triángulo y el área total. Anota tu procedimiento y tu resultado en el recuadro.

b. Traza la diagonal mayor para dividir el rombo en 4 triángulos. Calcula el área de cada triángulo y el área total. Demuestra que obtienes el mismo resultado que el que obtuviste anteriormente. Anota aquí tus procedimientos.

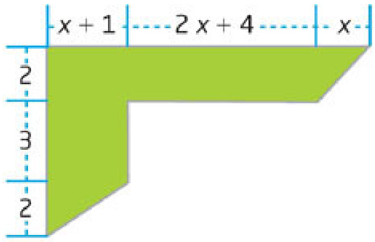
3. **Reúnete con un compañero, inscriban el rombo en un rectángulo y calculen el área de la figura a partir del área del rectángulo. Anoten su procedimiento en el recuadro.**

- **Comparen los tres procedimientos utilizados para calcular el área del rombo. ¿Obtuvieron el mismo resultado en todos los casos? Compartan sus procedimientos con sus compañeros. Arguméntenlos.**

El área de una figura puede representarse mediante diferentes expresiones algebraicas. Al simplificarlas, se puede demostrar que son equivalentes.

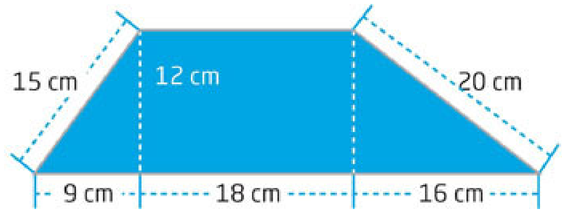
Practicar para avanzar

1. En tu cuaderno, divide de dos maneras la figura en triángulos y cuadriláteros. Suma las expresiones que representan las áreas de cada triángulo y cuadrilátero para representar el área total. Simplifica las expresiones para comprobar que son equivalentes.



Expresiones algebraicas equivalentes III

1. **Observa la figura y haz lo que se solicita.**



a. Escribe las fórmulas para calcular el perímetro y el área.
$A =$ ______________________ $P =$ ______________________

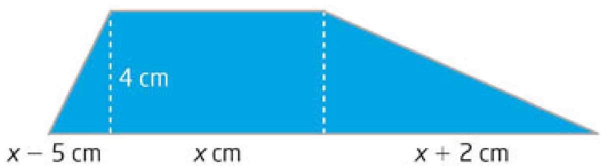
b. Si no recordaras las fórmulas del área y el perímetro, ¿cómo podrías obtenerlas?
____
____

c. Calcula el perímetro y área del trapecio. ______________________

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros.**

2. **Haz lo que se indica.**

De la siguiente figura se desconocen algunos valores representados por la variable *x*.



a. Calcula el área del triángulo de la izquierda en términos de *x*. ______________

b. Calcula el área del triángulo de la derecha en términos de *x*. ______________

c. Calcula el área del rectángulo en términos de *x*. ______________

d. Suma las áreas para obtener el área total. ______________

e. Obtén la longitud de la base mayor en términos de *x*. ______________

f. Utiliza la fórmula: "Base mayor más base menor, por altura entre dos" para obtener el área. Luego demuestra que el resultado que obtuviste coincide con la suma de las tres áreas.

- **Comparte con tus compañeros tus procedimientos y observa si tus cálculos y simplificaciones son correctos. En grupo, retomen el trapecio de la actividad 1 y sustituyan las medidas por expresiones en términos de *x*, consideren que *x* es igual a 18 y calculen el área con diferentes métodos.**

3. **Retoma la figura anterior, inscríbela en un rectángulo y calcula su área a partir del área del rectángulo. Sigue los pasos que se indican.**

i. Calcula el área del rectángulo que comprende al trapecio.

ii. Calcula cuánto mide el área de cada triángulo que no forma parte del trapecio.

iii. Obtén el área del trapecio. Para eso, resta las áreas de los triángulos del área del rectángulo.

Aplica lo que aprendiste y responde.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Retoma las tres expresiones algebraicas que obtuviste en cada procedimiento al calcular el área del trapecio. Asigna a la variable *x* el valor de 10 y verifica que obtienes el mismo resultado en todas ellas.**

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros y revisen si sus simplificaciones son correctas. Escribe una conclusión en tu cuaderno sobre por qué son equivalentes las expresiones.**

Secuencia didáctica

23

Áreas de figuras

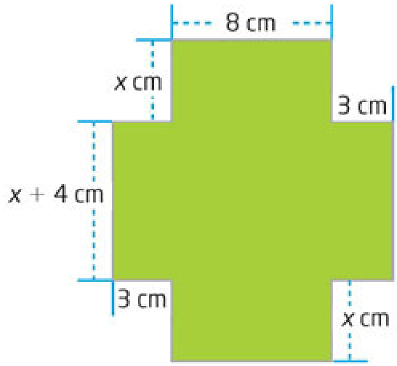
Aprendizaje esperado: Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras)

Lección 1

Diferentes estrategias para encontrar el área

PUNTO DE PARTIDA

1. Observa la figura y contesta.



a. ¿Cuáles son el perímetro y el área de la figura expresados en términos de *x*?
Perímetro = ____________

Área = ____________

b. Reúnete con un compañero y comenten el procedimiento que usaron para encontrar el área de la figura. Luego escriban dos procedimientos diferentes para hallar el área.

Procedimiento 1: ____________

____

Procedimiento 2: ____________

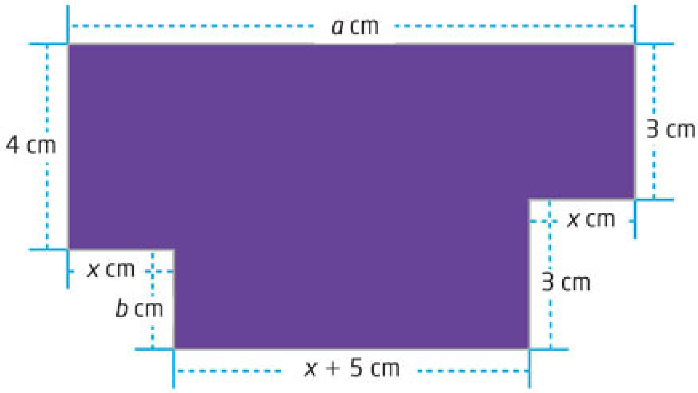
____

- **Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros y verifiquen que llegan al mismo resultado.**

Expresiones algebraicas para calcular el área

TRAYECTO FORMATIVO

1. Observa la figura y haz lo que se pide.



a. Encuentra el valor de *b*. ____________

b. Escribe una expresión que represente el valor de *a*. ____________

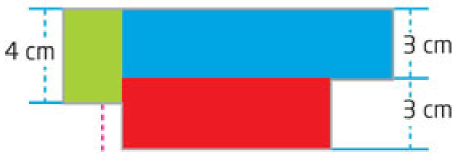
c. Explica cómo determinaste la expresión para *a* y el valor de *b*. ____________

____

____

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

2. **Las imágenes muestran diferentes formas de dividir la figura anterior. Con base en los datos originales, calcula las medidas faltantes y obtén expresiones algebraicas para representar las áreas.**



Área: ______________________ Área: ______________________

3. **Otra manera de calcular el área de la figura consiste en inscribirla en un rectángulo. Obtén las medidas faltantes y la expresión para representar el área.**

Área: ______________________

4. **Demuestra que las expresiones anteriores son equivalentes. Para ello, sustituye la variable x por un valor numérico.**

- **Comenta con tus compañeros de qué otras formas se puede dividir la figura y si se obtienen expresiones equivalente a las anteriores.**

El área de una figura puede representarse mediante diferentes expresiones algebraicas. Es posible simplificar las expresiones utilizando operaciones algebraicas para demostrar que son **equivalentes**.

Por ejemplo, la expresión $4x + (2x + 5)(3) + (x + 5)(3)$ se puede simplificar para obtener la expresión $4x + 6x + 15 + 3x + 15$ que finalmente resulta en $13x + 30$.

Practicar para avanzar

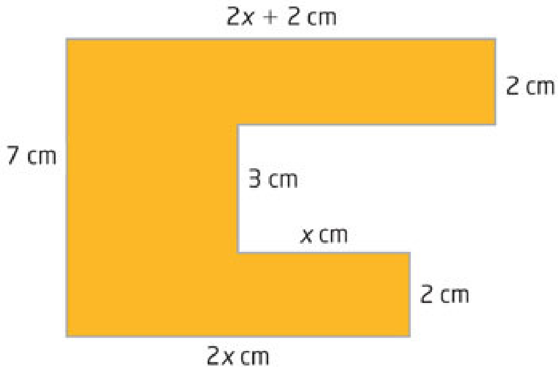
1. Considera la división de la derecha para la figura de la actividad inicial. Calcula su área en tu cuaderno.

   a. Simplifica la expresión que obtuviste y las expresiones que resultan de los procedimientos que propusiste en el inicio de la secuencia y demuestra que son equivalentes.

Lección 2

Expresiones algebraicas equivalentes IV

1. **Observa la siguiente figura.**



a. Encuentra la medida de cada lado si el valor de x es igual a 4 y calcula el área de la figura.

b. Considera las divisiones que se muestran. En cada caso, escribe una expresión algebraica para la suma de las áreas de los tres rectángulos y simplifícalas.

- ¿Cómo obtuviste el valor de la base del rectángulo rojo en ambos casos?

____

____

- En la lección anterior obtuviste las medidas de varios rectángulos. ¿Qué diferencia hay entre lo que hiciste para obtener las medidas de los lados de aquellas figuras y lo que hiciste con las figuras de esta lección? ______________

____

____

____

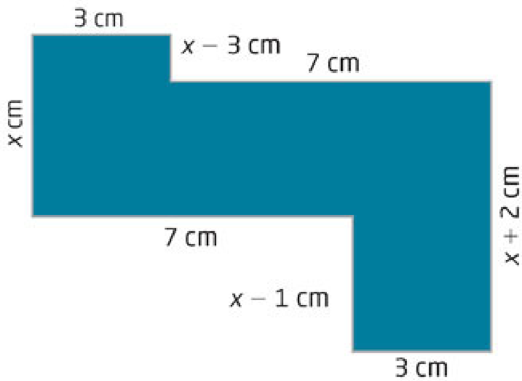
c. Calcula el área de la figura original a partir del área del rectángulo que se muestra a la derecha.

- **Comprueba, con operaciones algebraicas, que las tres expresiones que encontraste para la figura son equivalentes.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. Propón tres formas de encontrar el área de la figura. Anota las expresiones algebraicas correspondientes a cada una y demuestra que las tres son equivalentes.



Expresión 1: ____________________

Expresión 2: ____________________

Expresión 3: ____________________

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros y revisen sus simplificaciones. Luego comenten si se pueden dividir las figuras en otro tipo de cuadriláteros y si obtendrían el mismo resultado.**

Secuencia didáctica

24

Propiedades de la igualdad

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Lección 1

¿Qué significa la igualdad?

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee el enunciado y haz lo que se pide.

Luisa escribió una expresión para describir el siguiente enunciado para su clase de Matemáticas: “A un número lo multiplicas por 5 y al resultado le sumas 10”. Luisa escribió la expresión algebraica $5n = 5n + 10$.

a. Revisa la expresión con que Luisa representó el enunciado.

b. Utiliza el valor $n = 2$ en la expresión que escribió Luisa. ¿Se cumple la igualdad? ¿Por qué? ____________________

____

- Utiliza los valores $n = 5$ y $n = 0$. ¿Se cumple la igualdad? ¿Qué concluyes? ____

____

c. ¿Es correcta la expresión algebraica que escribió Luisa? ¿Por qué? ____________

____

____

d. Revisa el enunciado que Luisa debía describir. ¿Requiere el uso de una igualdad? ¿Por qué? ____________________

____

e. ¿Cómo le explicarías a Luisa qué significa la igualdad entre dos expresiones algebraicas? ____________________

____

f. Escribe una expresión algebraica que simbolice correctamente el enunciado.

____

- **Revisa tus respuestas con tus compañeros y valídenlas con ayuda de su profesor.**

Expresiones equivalentes

TRAYECTO FORMATIVO

1. Reúnete con un compañero, lean la situación y respondan.

Raúl fue a la tienda y compró un paquete de videos que le costó \$1 000. Raúl pagó con dos billetes de \$500.

a. ¿Hizo Raúl el pago correcto? ¿Por qué? ____________________

____

b. Escriban su argumento como una expresión numérica. ____________________

____

c. ¿Qué significa el signo de igual en la expresión que escribiste? Elijan entre las opciones siguientes. Después justifiquen su respuesta.
- Indica el resultado de una operación.
- Indica que los dos lados de la igualdad son equivalentes, es decir, representan exactamente lo mismo.

____

d. Otro día Raúl volvió a la tienda y compró dos videojuegos por $500 cada uno. Esta vez pagó con un billete de $1 000.
- ¿Hizo Raúl el pago correcto? ¿Por qué? ______________________________

____

e. Escriban su argumento como una expresión numérica. ______________________________

f. ¿Qué significa el signo de igual en la expresión que escribieron? ______________________________

____

- **Comparen las respuestas de los incisos *b* y *e* con otra pareja. Después analicen la siguiente información en grupo y corrijan sus respuestas si es necesario.**

Dos **expresiones algebraicas** son **equivalentes** si al sustituir la o las variables por los mismos valores, el resultado en ambas es el mismo.
Por ejemplo, $(n + 2)^2$ y $n^2 + 4n + 4$ son equivalentes ya que
$(n + 2)^2 = (n + 2) \times (n + 2) = n^2 + 2n + 2n + 4 = n^2 + 4n + 4$
El **signo =** se puede usar para representar una relación de equivalencia, es decir, indica que las expresiones numéricas o algebraicas de su izquierda y de su derecha son equivalentes.

2. Analiza las expresiones y escribe si son o no equivalentes y por qué.

$3n + 4$ y $4 + 3n$: ______________________________

$3n + 4$ y 7: ______________________________

Practicar para avanzar

Haz en tu cuaderno lo que se pide.

1. Indica si las expresiones algebraicas son o no son equivalentes y justifica por qué.

a. $15y + 35$ y $5(3y + 7)$ **b.** $(3 + 8)^2$ y $3^2 + 8$ **c.** $(4 - 2)^2$ y $(4a + 2)(4 - 2)$

2. Escribe una expresión equivalente a la de cada inciso.

a. $6(4z - 3)$ **b.** $(8^3)(8^{-2})$ **c.** $4n + 5n - 12n$ **d.** $\frac{5^5}{5^{-2}}$

Lección 2 Propiedades y uso de la igualdad

1. **Analicen en parejas cada situación y respondan en el cuaderno.**

   En una tarea sobre ecuaciones, Gerardo no entendía por qué algunos compañeros tenían resultados distintos al suyo. La solución de la ecuación $3x - 4 = 2$ que él obtuvo era $x = 2$, pero uno de sus compañeros obtuvo $2 = x$.

   En otro problema, Gerardo tenía las condiciones $7x + 2y = 22$, con $y = 4$ y no sabía qué hacer, pero su compañero decía que $x = 2$.

   En la última actividad preguntaba que, si un perro pesa lo mismo que un gato, y el gato pesa lo mismo que tres ardillas, ¿qué puede concluirse sobre el peso del perro y el de las tres ardillas? Gerardo y su compañero consideraban que el perro pesa lo mismo que las tres ardillas, pero no lo podían justificar.

   a. ¿Quién tiene la respuesta correcta en la primera ecuación? ¿Por qué?
   b. ¿Es correcta la respuesta del compañero de Gerardo para la ecuación $7x + 2y = 22$? ¿Por qué?
   c. ¿Están de acuerdo con la respuesta de Gerardo y su compañero a la última pregunta? ¿Cómo la justificarían?

2. **Contesten en parejas. Escriban sus respuestas en el cuaderno.**

   a. ¿La igualdad $x = x$ es válida para cualquier valor de x?
   - ¿La propiedad anterior significa que todas las veces que aparece x en una ecuación se refiere al mismo número o puede cambiar?

   b. Lean las palabras *oso* y *reconocer* empezando por el final. ¿Dicen lo mismo?
   - ¿Qué sucede en el caso de las expresiones $a = b$ y $b = a$?

   c. Representen con literales el problema del perro de la actividad anterior.
   - ¿Cómo explicarían esta propiedad de la igualdad con palabras?

- **Revisen sus respuestas con su profesor. Luego lean la siguiente información.**

Las propiedades de la igualdad que definen una relación de equivalencia son:

Reflexividad: Un número siempre es igual a sí mismo. Es decir, $x = x$. Por ejemplo, $3 = 3$.
Simetría: El orden de los términos en la igualdad no importa. Es decir, si $x = y$, entonces $y = x$. Por ejemplo, si $x = 5$, entonces $5 = x$.
Transitividad: Dos números iguales a un tercer número son iguales entre sí. Esto es, si $x = y$, y además $y = z$, entonces $x = z$. Por ejemplo, si $x = 2$ y $a = 1 + 1$, entonces $x = 1 + 1$.
Sustitución: Si $x = y$ entonces x se puede sustituir por y en cualquier expresión. Por ejemplo, si $x = -6$ y $y = 3x + 2$, entonces $y = 3(-6) + 2 = -18 + 2 = -16$.
Suma de equivalencias: Los dos lados de dos ecuaciones pueden sumarse o restarse respetando la igualdad y la igualdad no se altera. Esto es, si $a + b = j$ y $c + d = k$, entonces $(a + b) \pm (c + d) = j \pm k$. Por ejemplo, si $3 + 4 = 7$ y $-5 + 2 = -3$, entonces $(3 + 4) - (-5 + 2) = 7 - (-3)$.

3. **Analiza la solución de la siguiente ecuación. Describe qué se hizo en cada paso de la solución y si cambió o no la ecuación original.**

$$3x + 4 - 3x = 7x + 2 - 3x$$ ______________________________

$$4 = 4x + 2$$ ______________________________

$$4 - 2 = 4x + 2 - 2$$ ______________________________

$$2 = 4x$$ ______________________________

$$\frac{2}{4} = \frac{4x}{4}$$ ______________________________

$$\frac{1}{2} = x$$ ______________________________

- **Revisa tus respuestas con dos compañeros y coméntenlas con el profesor. Escribe tus conclusiones en tu cuaderno.**

Otras propiedades de la igualdad que la relacionan con las operaciones son:

1) Si $x = y$ entonces $x \pm z = y \pm z$. Es decir, si en una igualdad se **suma** o **resta** el mismo número de los dos lados, la igualdad no se altera.
2) Si $x = y$, $z \neq 0$, entonces $xz = yz$. Es decir, si en una igualdad se **multiplica** el mismo número de los dos lados, la igualdad no se altera.
3) Si $x = y$, $z \neq 0$, entonces $\frac{x}{z} = \frac{y}{z}$. Es decir, si en una igualdad se **divide** el mismo número (distinto de cero) de los dos lados, la igualdad no se altera.

Las propiedades de la igualdad nos permiten escribir **equivalencias** de expresiones algebraicas para simplificarlas. Además, en el caso de las ecuaciones y de los sistemas, nos sirven para encontrar la solución.

- **Retomen la actividad 1 y comenten, para cada caso, qué propiedades de la igualdad utilizaron en el proceso de solución de la ecuación.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Analiza la solución del siguiente sistema de ecuaciones, cópiala en tu cuaderno y describe la propiedad que se usó en cada paso.**

i. $2x + 3y = 12$
$-2x + 12y = -40$

ii. $2x + 3y = 12$
$0x + 15y = -28$

iii. $2x + 3y = 12$
$y = -\frac{28}{15}$

iv. $2x + 3\left(-\frac{28}{15}\right) = 12$
$y = -\frac{28}{15}$

v. $2x - \frac{28}{5} = 12$
$y = -\frac{28}{15}$

vi. $x = \frac{88}{10}$
$y = -\frac{28}{15}$

- **Validen en grupo sus respuestas. Expliquen por qué eligieron las propiedades para cada paso y corrijan si es necesario. Luego comenten por qué es importante conocer las propiedades de la igualdad para resolver sistemas de ecuaciones.**

Secuencia didáctica

25

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Lección 1

Solución algebraica

PUNTO DE PARTIDA

1. **Formen parejas, lean la situación y hagan lo que se pide.**

Una compañía tiene dos fábricas que producen dos modelos de calculadora: calculadora simple y calculadora científica. La fábrica que se encuentra en León tiene capacidad de producir 60 calculadoras simples y 90 calculadoras científicas al día. La planta que se encuentra en Morelia puede producir 75 calculadoras simples y 40 científicas. ¿Cuántos días a la semana debe operar cada planta si la compañía debe distribuir 825 calculadoras simples y 730 científicas a la semana?

a. Analicen el problema y escriban las ecuaciones lineales que describen la producción diaria en cada fábrica. Representen con la variable x el número de días que opera la fábrica de León y con la variable y el número de días que opera la fábrica de Morelia. ______

b. Respondan.

- ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que deben resolver? ______
- ¿Qué representa la primera variable? ______
- ¿Qué representa la segunda variable? ______

- **Revisen con otra pareja sus respuestas. Si tienen dudas, coméntenlas con el profesor y el resto del grupo.**

Método de sustitución

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Retomen la situación anterior y contesten.**

a. Utilicen, como se indica, las propiedades de la igualdad en la primera ecuación para expresar la variable y en términos de la variable x. Escriban la ecuación resultante en cada paso.

- Usen la propiedad de suma o resta para que el término que contiene a la variable x quede del lado del término independiente. ______
- Usen la propiedad de multiplicación o la de división para que la variable y tenga coeficiente igual a 1. ______
- Usen la propiedad de sustitución en el término donde aparece la variable y en la segunda ecuación por el nuevo valor. ______
- ¿Cuántas incógnitas tiene ahora la ecuación? ______

b. Resuelvan la ecuación anterior para la variable x. ______

c. Usen el valor de x para encontrar el valor de la variable y. ______

d. Ahora que ya conocen los valores de las incógnitas, sustitúyanlas en el sistema original para verificar que se cumplen las dos igualdades. ¿Cuántos días debe operar cada planta? ______

e. ¿Obtendrían la misma solución si despejaran primero la variable y? ¿Por qué?

______

f. Analiza el procedimiento seguido hasta aquí y escribe en tu cuaderno una explicación de cómo usaste la propiedad de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- **Analicen en grupo la siguiente información y, con su profesor, identifiquen todos los pasos del método en el procedimiento que siguieron para resolver la actividad.**

La forma en que resolviste el **sistema de ecuaciones** del problema anterior se conoce como **método de sustitución**. Este método se puede resumir como:

1. Despeja el valor de una de las variables en una de las ecuaciones.
2. Sustituye el valor en la otra ecuación.
3. Encuentra el valor de la incógnita.
4. Sustituye el **valor encontrado** en la ecuación en que se despejó la primera variable.
5. Encuentra el valor de la segunda variable.
6. Comprueba que la solución satisfaga todas las ecuaciones del sistema.

Si el sistema tiene más de dos ecuaciones, debes sustituir la variable despejada en las ecuaciones restantes y repetir el procedimiento para el sistema que resulta de hacerlo.

2. **Reúnete con dos compañeros y resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones en su cuaderno. Escriban una situación que se pueda modelar con ellos, verifiquen la solución gráficamente e interpreten la solución en términos de su problema.**

a. $\begin{cases} 5x - 5y = 5 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2m + 4n = -4 \\ 5m + 7n = 11 \end{cases}$

3. **Resuelve el siguiente problema utilizando el método de sustitución.**

Una comunidad campesina está formada por 380 miembros. La cantidad de miembros de sexo femenino supera a los de sexo masculino en 120 personas. ¿Cuántos miembros de la comunidad son de sexo femenino y cuántos son de sexo masculino?

- **Revisa tus respuestas con el resto del grupo y el profesor.**

Lección 2

Método de igualación

1. Lee con un compañero el problema y hagan lo que se indica.

Para llegar a su escuela, Juan Pablo camina a una velocidad de 5 km/h desde su casa hasta la parada del autobús y, en cuanto llega, lo toma. El autobús viaja a una velocidad de 45 km/h. La distancia de la casa de Juan Pablo a la escuela es de 15 km. ¿Cuánto tiempo camina Juan Pablo y cuánto tiempo viaja en autobús si tarda $\frac{3}{4}$ de h en llegar a la escuela?

a. Escriban un sistema de ecuaciones que represente la situación del problema. Utilicen las variables *c* y *a*. ____________________

____

- ¿Qué representa la variable *c*? ____________________
- ¿Qué representa la variable *a*? ____________________

b. Usen las propiedades de la igualdad para expresar la variable *a* en términos de la variable *c* en cada ecuación. Para ello, sigan los pasos que se describen a continuación.

- Usen la propiedad de suma o resta para que el término que contiene a la variable *a* quede del lado del término independiente. Escribe las ecuaciones que se obtienen. ____________________

  ____

- Usen la propiedad de multiplicación o división, si es necesario, para que la variable *a* tenga coeficiente igual a 1. El sistema equivalente al original es:

  ____

- Usen la propiedad reflexiva de la igualdad para igualar las dos expresiones que están en términos de *c*. ____________________
- ¿Cuántas incógnitas tiene ahora esta ecuación? ____________________

c. Resuelvan la ecuación anterior para la variable *c*. ____________________

____

d. Usen el valor de *c* para encontrar el valor de la variable *a*. ____________________

e. Ahora que ya conocen los valores de las incógnitas, sustitúyanlas en el sistema original para verificar que se cumplen las dos igualdades. ____________________

____

- ¿Durante cuánto tiempo camina Juan Pablo en su trayecto a la escuela?

  ____

- ¿Cuánto tiempo viaja en autobús? ____________________

  ____

- Escriban los valores anteriores en minutos. ____________________

  ____

- ¿Cuántos kilómetros camina Juan Pablo en su trayecto a la escuela? ________

____

- ¿Cuántos kilómetros recorre en autobús? ________________

f. ¿Obtendrían la misma solución si despejaran primero la variable *c*? ¿Por qué?

____

____

g. Analiza el procedimiento seguido hasta aquí y escribe en tu cuaderno una explicación de cómo usaste las propiedades de la igualdad para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- **Lean la siguiente información y, con su profesor, identifiquen todos los pasos del método en el procedimiento que siguieron para resolver la actividad.**

El método que utilizaste para resolver sistemas de ecuaciones se llama **método de igualación**. Los pasos de este método son:

1. Despeja la misma variable en ambas ecuaciones.
2. Aplica la propiedad reflexiva de la igualdad para igualar los valores equivalentes a la misma variable en ambas ecuaciones. De este modo obtienes una ecuación con una sola incógnita.
3. Resuelve la ecuación.
4. Sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones, con base en las propiedades de la igualdad.
5. Encuentra el valor de la otra variable.
6. Verifica que las dos ecuaciones del sistema se satisfagan al sustituir los valores encontrados.

Practicar para avanzar

1. Usa el método de sustitución para resolver los siguientes sistemas en tu cuaderno. No olvides verificar la solución.

a. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 6r + 4s = 5 \\ 3r + 2s = -6 \end{cases}$

2. Resuelve el problema con el método de igualación y el de sustitución.

En una tienda se ofrecen dos tipos de mezcla de cacahuates y nueces. Una de ellas contiene 60% de cacahuates y la otra, 35% de cacahuates. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de mezcla se deben usar para obtener 8 kg de una mezcla que tiene 50% de cacahuates?

a. ¿Coinciden las soluciones obtenidas con ambos métodos de resolución?

- ¿Deberían coincidir? ¿Por qué?

b. ¿Cuál de los dos métodos les parece más adecuado para resolver el problema? ¿Por qué?

Lección 3

Método de reducción

1. **Lean en parejas y respondan.**

Citlali y Carla fueron a comprar flores. Citlali compró 2 docenas de rosas y 7 de margaritas y pagó $84. Carla compró 5 docenas de rosas y 4 de margaritas y pagó $95.25. Su amiga Julia les preguntó cuál es el precio de la docena de rosas y de la docena de margaritas. ¿Qué le responderán?

a. Escriban un sistema de ecuaciones que represente esta situación. Usen las variables x y y para representar la situación. ______

- ¿Qué representa la variable x? ______
- ¿Qué representa la variable y? ______

- **Comparen sus respuestas con las de otra pareja y corrijan si es necesario.**

2. **Reúnete con dos compañeros. Retomen la situación anterior y hagan lo que se solicita.**

Herramientas académicas

Para reforzar lo que aprendiste en la secuencia, entra a las páginas: www.esant.mx/fasema2-003, www.esant.mx/fasema2-004, www.esant.mx/fasema2-005.

a. Multipliquen la primera ecuación por 5. ______
- ¿Qué propiedad de la igualdad usaron? ______

b. Multipliquen la segunda ecuación por -2. ______
- ¿Qué propiedad de la igualdad usaron? ______

c. Escriban el sistema de ecuaciones que resulta de estas dos acciones. ¿Qué observan? ______

d. Si usan esa ecuación en lugar de la segunda. El sistema equivalente al original queda como: ______

e. ¿Cuántas incógnitas tiene la nueva segunda ecuación? ______
- Resuelvan esta ecuación y encuentren el valor de la variable. ______

- Sustituyan ahora este valor en la primera ecuación. ______
- Resuelvan la ecuación resultante y encuentren el valor de la otra incógnita. ______

f. ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones? ______
- Verifiquen la solución que obtuvieron. ______
- ¿Qué significa este resultado en términos del problema? ______

g. Analiza el procedimiento seguido hasta aquí y escribe en tu cuaderno una explicación de cómo usaste las propiedades de la igualdad para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- **Lean la siguiente información e identifiquen, en grupo, todos los pasos del método en el procedimiento que siguieron para resolver la actividad.**

El método que usaste se conoce como **método de reducción** o **suma y resta**. Al tener dos ecuaciones con dos variables acomodadas en el mismo orden:

1. Coloca una ecuación debajo de la otra y haz coincidir las variables y las constantes.
2. Emplea las propiedades de la igualdad para manipular las ecuaciones.
3. Multiplica una ecuación por un valor constante para lograr que los coeficientes de una de las variables sean iguales, pero tengan signos opuestos.
4. Suma las ecuaciones utilizando las propiedades de la igualdad, de manera que resulte una ecuación con una sola incógnita o variable. Al hacer esto, el sistema resultante equivaldrá al original.
5. Encuentra el valor de la incógnita en la segunda ecuación.
6. Sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones originales.
7. Resuelve la ecuación resultante y determina el valor de la otra incógnita.

Aunque todos los métodos pueden servir para resolver cualquier sistema de ecuaciones, algunos serán más útiles según el caso.

3. Resuelve en tu cuaderno los siguientes sistemas de ecuaciones usando los tres métodos estudiados en la secuencia.

a. $\begin{cases} x = y - 1 \\ x = 5 - y \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x - y = -3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$

- **Verifica tus soluciones y compáralas con las de dos compañeros. Si obtuvieron resultados diferentes analicen por qué.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. Resuelve en tu cuaderno el sistema con uno de los métodos estudiados .

$$\begin{cases} 3v - 2z = 9 \\ w + z = 3 \end{cases}$$

a. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?
b. Escribe tres posibles soluciones.

2. De los métodos estudiados en esta secuencia, elige el que se te hace más fácil y justifica en tu cuaderno tu elección.

3. Resuelve el problema en tu cuaderno.

El lunes, Salvador compró 10 botones medianos y 5 chicos para su mamá y pagó \$16.50. El martes compró 5 botones medianos y 10 chicos, pues su mamá necesitaba más. Esta vez pagó \$14.25. ¿Cuánto costó cada tipo de botón?

- **Revisa tus respuestas con un compañero y pregunten sus dudas al profesor. Comenten en grupo cuál de los métodos estudiados prefieren.**

Secuencia didáctica
26

Diferentes tipos de variación: lineal e inversa

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Lección 1 Diferentes relaciones entre cantidades

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee la situación y responde.

Una compañía de distintos tipos de taxis tiene las siguientes tarifas:

TARIFA DE TAXI LIBRE
Cada 250 m: $1.37
No hay banderazo.

TARIFA DE TAXI DE SITIO
BANDERAZO: $15.20
Cada 250 m o 45 s: $1.50

TARIFA DE RADIOTAXI
BANDERAZO: $29.60
Cada 250 m o 45 s: $1.87

TARIFA DE TAXI EN TERMINAL
Zona 1 (hasta 10 km): $105.00
Zona 2 (Hasta 20 km): $155.00
Zona 3 (Hasta 40 km): $297.00

a. Encuentra cuánto pagarías por viajes de 10, 20, 30 y 40 km con cada tarifa.

Tipo de taxi	10 km	20 km	30 km	40 km
Taxi libre				
Taxi de sitio				
Radiotaxi				
Taxi en terminal				

b. Analiza las cantidades para cada tipo de taxi. Al aumentar el número de kilómetros, ¿aumenta de la misma manera la cantidad por pagar? ¿Cómo lo sabes?

____

____

c. Un pasajero tomó un taxi libre de esta compañía en la calle y pagó $164. Al día siguiente tomó un taxi de otra compañía y pagó la misma cantidad, pero viajó menos kilómetros. ¿Cómo se comparan las tarifas de las dos compañías? ________

____

d. ¿Qué sucede con la tarifa cuando, dado el mismo pago, la cantidad de kilómetros recorridos disminuye? ________________

____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y con tu profesor.**

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Proporcionalidad

Variación lineal

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Revisa nuevamente las tarifas de taxi y realiza lo que se te pide.**

   a. Calcula el aumento en el costo por cada 10 kilómetros de incremento en la longitud del viaje.

Tipo de taxi	Aumento en el costo por viaje			
	De 0 a 10 km	De 10 a 20 km	De 20 a 30 km	De 30 a 40 km
Taxi libre				
Taxi de sitio				
Radio taxi				
Taxi en terminal				

   b. ¿En qué casos, al tener un aumento de 10 kilómetros en el viaje, el aumento en el costo es el mismo, sin importar cuántos kilómetros se recorren en el viaje? ______________________________

   c. ¿En algún tipo de taxi el costo se relaciona de manera proporcional con el número de kilómetros recorridos? Si es así, escribe cuál y justifica tu respuesta.

   ____

   d. Para cada servicio de taxi, escribe una o varias expresiones algebraicas que relacionen la distancia recorrida durante el viaje (x) con el costo del viaje (y).

   - Taxi libre: ______________
   - Taxi de sitio: ______________
   - Radio taxi: ______________
   - Taxi en terminal: ______________

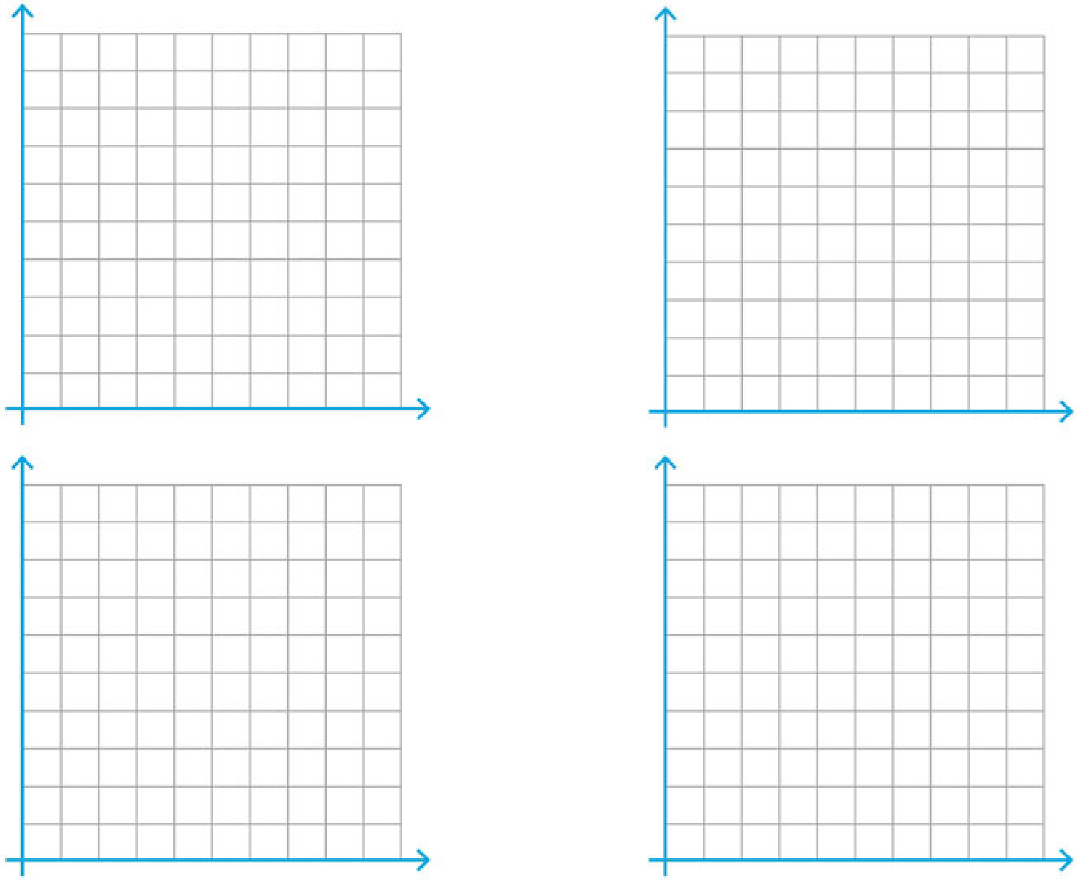
Dos variables x y y están relacionadas por una variación lineal si la variable dependiente y y la variable independiente x cumplen que $y = mx + b$, donde m es la constante de la variación lineal y representa la pendiente o inclinación de la recta y b es la ordenada al origen, es decir, el valor de la función cuando $x = 0$.

En una relación de variación lineal, cada vez que aumenta la variable independiente en determinada cantidad, el aumento correspondiente en la variable dependiente es siempre el mismo.

- **¿En cuáles servicios de taxi el número de kilómetros y el costo del viaje se relacionan de manera lineal? Coméntalo con tus compañeros.**

Lección 2 Gráfica de una variación lineal

1. **Traza las gráficas de los diferentes servicios de taxi en los sistemas coordenados.**



La gráfica de una relación de variación lineal es una línea recta que puede o no pasar por el origen.

- **Compara con tus compañeros las gráficas y analicen en qué casos, la gráfica no pasa por el origen.**

Practicar para avanzar

1. El salón Carmina ofrece servicio de banquetes. Los precios incluyen la renta del salón y la comida. Un banquete para 80 personas cuesta $8 000.00. Para 150 personas, el costo es de $13 600.00.

   a. Dibuja la gráfica del costo con respecto al número de personas.
   b. Escribe una ecuación que represente la relación entre el número de personas y el costo del banquete.
   c. Encuentra el costo para un banquete de 200 y para uno de 300 personas.

Variación inversa

2. **Calcula los kilómetros recorridos en los siguientes servicios en diferentes ciudades. En todos los casos, supón que es taxi libre y no hay banderazo.**

Servicio de taxi libre	Costo del viaje ($)	Tarifa por cada 250 m ($)	Longitud del viaje (km)
Ciudad de México	200	1.40	
Hermosillo	200	1.50	
Puebla	200	1.70	
Acapulco	200	2.00	

a. Al aumentar la tarifa en las diferentes ciudades, ¿qué sucede con la distancia recorrida cuando el costo del viaje se mantiene en $200? ______

- ¿Y cuando la tarifa disminuye? ______

b. ¿Es una relación de variación lineal la que existe entre la tarifa y los kilómetros recorridos? ¿Cómo lo sabes? ______

c. ¿Es una relación de proporcionalidad inversa la que existe entre la tarifa y los kilómetros recorridos? ¿Cómo lo sabes? ______

d. Escribe una ecuación que relacione la tarifa (x) con la cantidad de kilómetros recorridos en el viaje (y). ______

e. ¿Cómo se compara esta ecuación con las que escribiste relacionando la distancia recorrida con el costo del viaje? ______

f. Dibuja en tu cuaderno la gráfica que relaciona las tarifas de los taxis con los kilómetros recorridos, dado un costo de $200 por viaje.

Dos variables x y y están relacionadas por una variación inversa si la variable dependiente y y la variable independiente x cumplen $y = \frac{a}{x}$, donde a es constante.
En este caso, al aumentar una cantidad, la otra disminuye de la misma manera.

- **Comenta con tus compañeros y con tu profesor cómo puedes distinguir entre relación de variación directa y relación de variación inversa.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **En cada situación, indica si las cantidades están en una relación de variación directa o inversa, escribe una ecuación que represente la relación y traza la gráfica en tu cuaderno.**

   a. Llevas 150 galletas a una fiesta. El número de personas en la fiesta se denota por *n* y la cantidad de galletas que cada persona recibirá se denota por *m*. ______

   ______

   b. Trabajas en un restaurante por 20 horas. Representa con *x* lo que te pagan por hora y con *y* la cantidad de dinero que recibes. ______

   ______

   c. Emprendes un viaje de 250 kilómetros. Representa con *t* el número de horas que dura el viaje y con *v* la velocidad del automóvil. ______

   ______

2. **Resuelve el problema.**

   Un estudiante universitario ofrece servicios de tutoría a alumnos de secundaria y preparatoria. Cobra $50 por ir al domicilio del estudiante y $250 por hora de tutoría.

   a. ¿Cuáles son las variables en el problema? ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente? ______

   ______

   b. ¿Cuánto cobraría por 2 horas seguidas de tutoría? ¿Y por 4 horas? ______

   ______

   c. ¿Qué sucede con el costo a medida que las horas aumentan? ______

   d. ¿Es una relación de proporcionalidad la que existe entre el costo y el número de horas? ¿Por qué? ______

   ______

   ______

   e. ¿Es una relación de variación directa la que existe entre el costo y el número de horas? ¿Por qué? ______

   ______

   ______

   f. Escribe una ecuación que represente esta relación. ______

   ______

   g. Dibuja, en tu cuaderno, la gráfica que representa la relación entre el número de horas de tutoría y el costo.

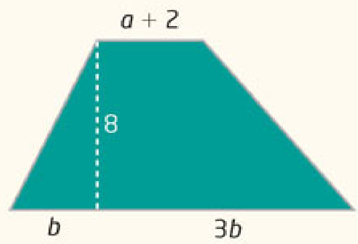
- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Luego escribe en tu cuaderno la diferencia entre la variación directa y la inversa. Incluye en tu explicación gráficas y representaciones algebraicas.**

Reviso mi trayecto

Resuelve los problemas. Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Toma nota de los contenidos que tienes que repasar.

1. Escribe dos expresiones equivalentes que representen las situaciones.

a. El área de la figura.



b. Mauricio corrió 28 km en 5 días. El lunes corrió la mitad de lo que corrió el miércoles. El jueves corrió 5 km y el viernes, el doble de lo que corrió el martes.

2. Analiza si las expresiones $14y + 8$ y $5(3y + 4)$ son equivalentes. Justifica tu respuesta.

____

____

____

3. El largo de una cancha de tenis mide 12.8 m más que su ancho. Si el perímetro de la cancha es de 70 m, ¿cuáles son sus medidas?

a. Plantea el sistema de ecuaciones y resuélvelo.

b. Describe en qué pasos del proceso de solución usaste las propiedades de la igualdad. ____

____

____

Secuencia didáctica

27

Teselados

Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás la relación entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

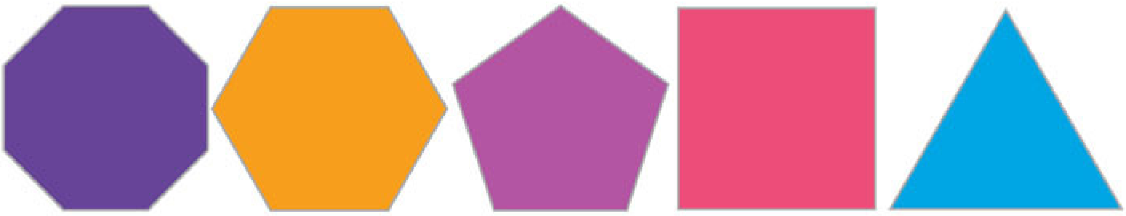
Lección 1

Polígonos que cubren el plano

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee el problema y haz lo que se pide.

Un fabricante de losetas necesita saber con qué polígonos regulares puede cubrir la superficie de un piso sin dejar huecos. Por el momento quiere que los pisos se cubran solamente con un polígono y no con combinaciones de dos o más.



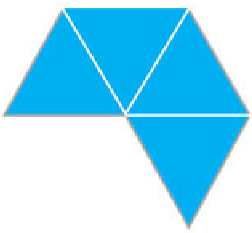
( ) ( ) ( ) ( ) ( )

a. Marca con una ✔ los polígonos regulares que pueden cubrir la superficie del piso sin dejar huecos. Explica cómo lo determinaste y anota tus argumentos.

____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y argumenta el porqué de tu elección.**

2. Analiza las figuras y responde.

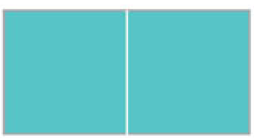


a. ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un triángulo equilátero? ____________________

b. Si se elige un vértice de uno de los triángulos, ¿cuántos triángulos equiláteros pueden compartir ese vértice sin superponerse y sin dejar huecos entre ellos? __________

c. ¿Cuánto suman los ángulos de los triángulos equiláteros que coinciden en un vértice? ______________

d. ¿Se puede cubrir un plano únicamente con triángulos equiláteros? ____________________



e. ¿Cuánto suman los ángulos de los cuadrados que comparten un mismo vértice? ______________

f. ¿Es posible cubrir un plano usando únicamente cuadrados? Explica por qué. ______________

____

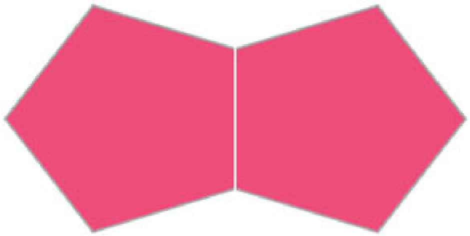
____

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros.**

Los ángulos interiores de un teselado

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Observa la figura y haz lo que se solicita.**



   a. Mide un ángulo interior de uno de los pentágonos regulares que se muestran.

   b. ¿Cuántos pentágonos regulares pueden compartir el mismo vértice sin encimarse?

   c. ¿Cuánto suman los ángulos de los pentágonos que comparten dicho vértice?

   d. ¿Puede agregarse otro pentágono sin que se encimen? Explica por qué.

   e. ¿Se puede cubrir una superficie solamente con pentágonos? Argumenta tu respuesta.

   f. Analiza si es posible unir hexágonos regulares para cubrir un piso. Anota tus observaciones y justifica tu respuesta.

2. **En una hoja de reúso, traza y recorta dos cuadrados y tres triángulos equiláteros de 3 cm de lado y construye un teselado con ellos.**

   a. ¿Es posible hacer que tres triángulos equiláteros y dos cuadrados coincidan en un vértice sin que se superpongan ni queden huecos? Explica.

   b. ¿Cuánto suman los ángulos que coinciden en el punto central?

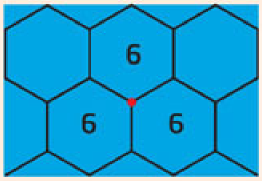
- **Comparte tus conclusiones con tus demás compañeros. Luego lee la siguiente información, revisa tus respuestas y si es necesario corrige.**

La palabra *teselado* proviene del latín *tessella*; así llamaban los romanos a las losetas que formaban los pavimentos de sus ciudades. Ahora se llama *tesela* a cada una de las piezas que forman un mosaico y cubren un plano. Para formar una tesela o mosaico, no puede superponerse una tesela con otra ni puede quedar algún hueco entre ellas.

Un teselado depende de la suma de los ángulos interiores de las figuras geométricas que coinciden en un punto, ya que la suma de estos debe ser 360º.

Lección 2 Teselados con dos o más figuras

1. Lee la información y traza en tu cuaderno los teselados que se solicitan.



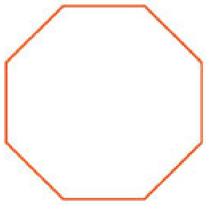
Para dar nombre a un teselado, es necesario contar los lados de cada polígono que rodea un vértice.

Por ejemplo, el teselado formado por hexágonos se llama "6.6.6".

a. 4.4.4.4 **b.** 3.3.3.3.3.3 **c.** 3.3.6.6 **d.** 3.6.3.6 **e.** 3.3.3.3.6

- **Los teselados 3.3.6.6 y 3.6.3.6 son diferentes. Comenta con tus compañeros a qué se debe y lleguen juntos a una conclusión.**

2. Copia varias veces el octágono regular en una hoja y responde.



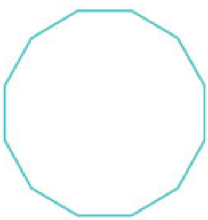
a. ¿Es posible crear un teselado solamente con octágonos? ¿Por qué? ______

______

b. ¿Con qué otra figura se pueden unir varios octágonos para lograr un teselado? ______

- ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un octágono? ______
- ¿Cuántos octágonos puedes juntar en un vértice del teselado? ______
- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de esos octágonos? ______
- ¿Cuántos grados faltan para completar 360º ? ______
- Si el teselado estuviera formado por dos octágonos y un cuadrado, ¿cuál sería su nombre? ______

3. Repite el proceso anterior para un dodecágono. Considera que cada ángulo interior de un dodecágono mide 150º y responde.



a. ¿Cuántos dodecágonos puedes juntar en un vértice del teselado? ______

b. ¿Cuánto mide el ángulo que falta para completar 360º? ______

______

c. ¿Qué figura o figuras puedes trazar para completar los polígonos que coinciden con un vértice del teselado? ______

______

d. ¿Cuál es el nombre del teselado que se formó? ______

______

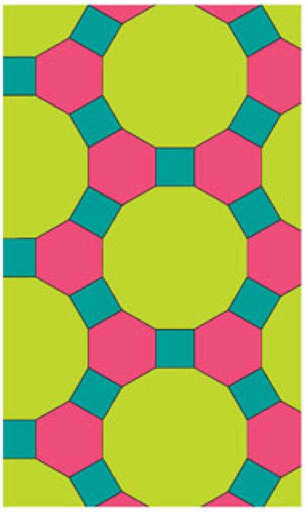
- **Comparte tus conclusiones con tus demás compañeros.**

Los **teselados regulares** están formados mediante la repetición de polígonos regulares iguales.

Los **teselados semirregulares** se forman con dos o más polígonos regulares y diferentes entre sí. El número de lados de los polígonos que rodean un vértice debe ser el mismo en todos los vértices del teselado. En este tipo de teselados, todos los polígonos que rodean cualquier vértice siempre son los mismos.

Solamente existen ocho teselados semirregulares.

4. Analiza el teselado y responde.



a. ¿Qué polígonos regulares forman el teselado? ____________________

b. ¿Cuántos grados miden los ángulos interiores de cada polígono?

____

c. Observa un vértice del teselado. ¿Cuántos polígonos lo rodean?

____

d. ¿Cuánto suman los ángulos que coinciden en cada vértice ? ________

e. ¿Sucede lo mismo en todos los vértices? Explica. ____________________

____

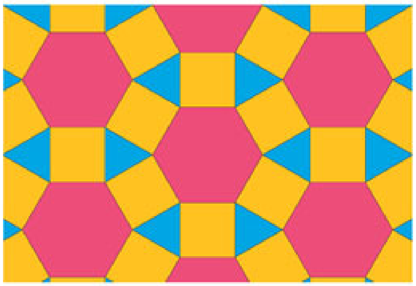
f. ¿Por qué este teselado es semirregular y no regular? Explica.________

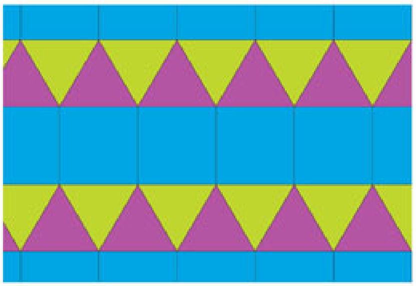
____

- **Comparte tus conclusiones con tus demás compañeros y juntos identifiquen los teselados semirregulares que han visto en la secuencia.**

Practicar para avanzar

1. Reúnete con un compañero y analicen los siguientes teselados.

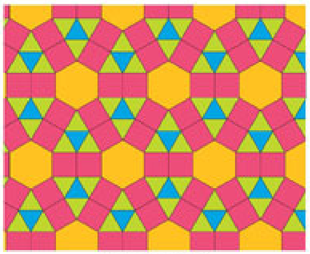


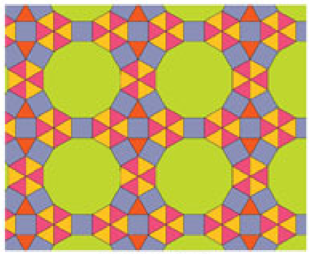


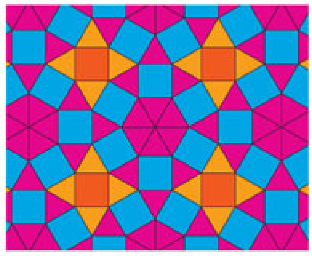
a. Expliquen por qué son teselados semirregulares.
b. Comprueben que, sin importar cuál vértice se elija, el nombre de cada teselado siempre es el mismo.
c. Junto con tu compañero de equipo, encuentren el teselado semirregular que falta. Consideren que está formado por cuadrados y triángulos.

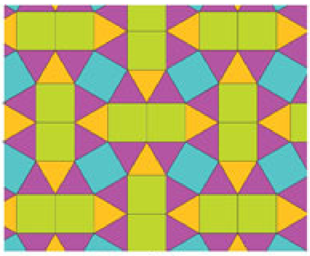
Otros teselados

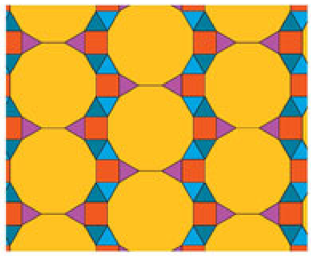
1. **Analiza los teselados con tus compañeros de equipo y haz lo que se pide.**


Teselado 1


Teselado 2


Teselado 3


Teselado 4


Teselado 5

a. En tu cuaderno, elabora una tabla, como la siguiente, donde indiques: qué polígonos forman cada teselado, los polígonos y ángulos que coinciden en sus vértices, y la suma de sus ángulos.

Teselado	Polígonos que lo forman	Polígonos y ángulos en el vértice	Suma de los ángulos
1	Triángulos, cuadrados y hexágonos	Vértices con un triángulo, dos cuadrados y un hexágono. Otros con tres triángulos y dos cuadrados.	360º

b. ¿Los teselados que se analizaron son semirregulares? ¿Por qué? ______________

____

____

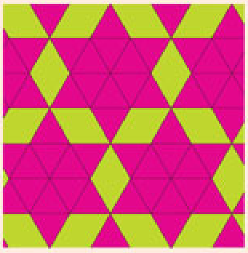
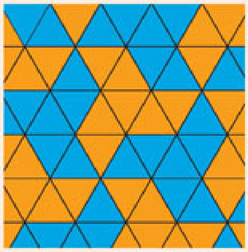
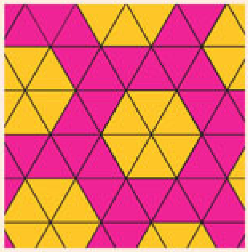
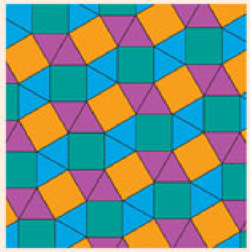
- **Comparte tus conclusiones con tus demás compañeros. Luego lean la siguiente información.**

Los teselados anteriores son **demirregulares**, pues se construyen combinando varios tipos de polígonos regulares, pero de modo que no todos los vértices tienen el mismo patrón.

Cuando un teselado presenta diferentes patrones en cada dos o más vértices ya no se le puede dar un solo nombre. Existen veinte diferentes teselados con dos patrones distintos y sesenta y un teselados con tres patrones distintos. Todavía no se sabe cuántos teselados existen con cuatro patrones.

2. **Traza en tu cuaderno un teselado demirregular, diferente de los que aparecen en la actividad anterior, con dos patrones.**

Cambiando la combinación de colores en teselados regulares se obtienen distintos diseños. Si además se combinan diferentes polígonos regulares, se puede encontrar gran variedad de teselados. Los siguientes ejemplos proporcionan una idea de lo que se puede hacer:

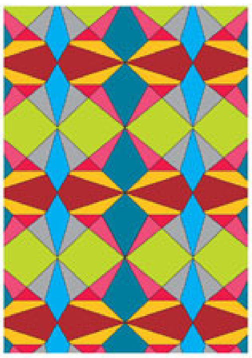





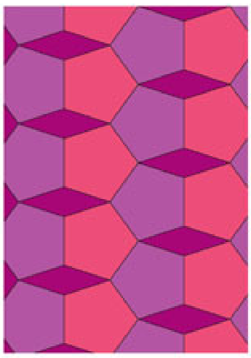
Por otro lado, los **teselados irregulares** se construyen a partir de polígonos regulares e irregulares. Por ejemplo, el teselado de la derecha está formado por rombos, los cuales no son polígonos regulares. Además, el número de polígonos que rodean los vértices no siempre es el mismo.

Aplica lo que aprendiste.

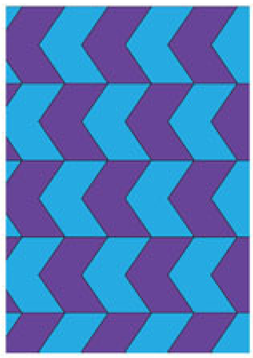
PUNTO DE LLEGADA

1. **Observa los teselados y, para cada uno, responde en tu cuaderno.**


Teselado 1


Teselado 2


Teselado 3


Teselado 4

a. ¿Cómo son los polígonos que los forman?
   - ¿Todos son iguales?
   - ¿Todos son regulares?

b. ¿Cuántos lados tienen los polígonos que rodean a los vértices de los teselados?

c. ¿Obtienes el mismo resultado para cualquier vértice?

- **Comparte tus respuestas con tus compañeros.**

Secuencia didáctica

28

Polígonos regulares

Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Lección 1

Polígonos: regulares e irregulares

PUNTO DE PARTIDA

1. En parejas, lean las afirmaciones. Anoten en los recuadros V (verdadero) o F (falso). Ilustren por qué no se cumplen las afirmaciones que consideran falsas.

a. Para construir un triángulo es suficiente con saber la medida de uno de sus lados. ☐

b. Para construir un cuadrado se necesita saber la medida de uno de sus ángulos. ☐

c. Con la medida de una de las diagonales de un cuadrado se puede construir un único cuadrado. ☐

d. Para construir un hexágono es suficiente conocer la medida de uno de sus lados. ☐

e. Un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados iguales. ☐

- **Comenten sus respuestas con sus compañeros. ¿En qué se diferencia un polígono regular de uno irregular?**

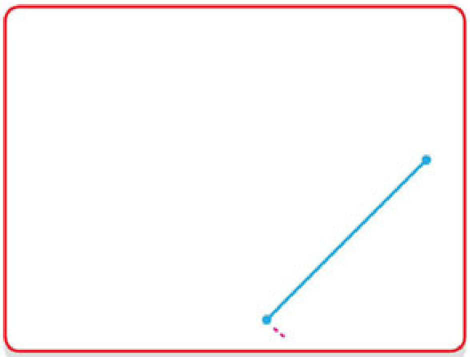
Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos geométricos

Construcciones de polígonos regulares

1. **Sigue los pasos para trazar un triángulo equilátero en el recuadro.**

TRAYECTO FORMATIVO

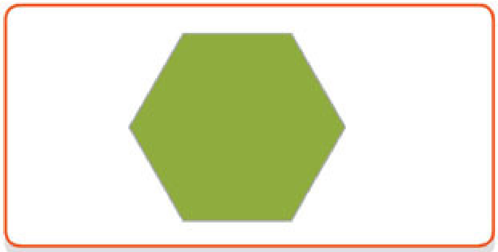
   i. Abre el compás para trazar una circunferencia con radio igual a la medida del segmento y con centro en uno de los extremos del segmento.
   ii. Con la misma medida, traza otra circunferencia, pero con centro en el otro extremo del segmento.
   iii. Marca uno de los puntos donde se intersecan las dos circunferencias y únelo con los extremos del segmento.



   - **Expongan sus construcciones y comenten qué datos se emplearon en la construcción del triángulo equilátero.**

2. **Realicen la actividad en parejas.**

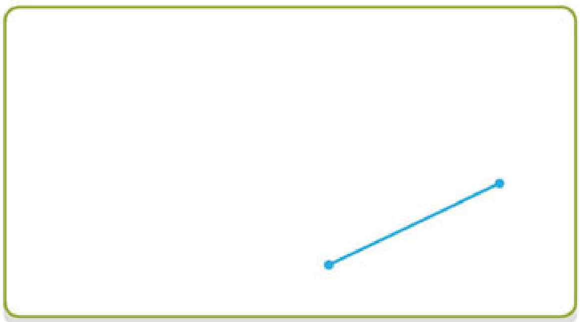
   a. Usen regla, compás y transportador y reproduzcan el hexágono verde en el recuadro de la derecha.



   - **Reúnanse con otra pareja y comprueben que el hexágono que trazaron sea regular. En grupo comenten qué datos fueron necesarios para reproducirlo.**

Practicar para avanzar

1. Construye dos cuadrados. Considera que cada segmento es uno de sus lados.

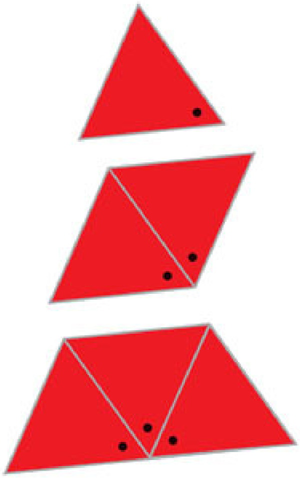


Comenten en grupo qué pasos siguieron para hacer la construcción.

Reproducción de polígonos

1. **Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.**

Primera construcción



Sigan los pasos en su cuaderno. Observen los ejemplos.

i. Tracen un triángulo equilátero.

ii. Seleccionen un vértice y uno de sus lados.

iii. Tracen otro triángulo equilátero junto al vértice que eligieron. El triángulo debe compartir un lado.

iv. Continúen con el mismo procedimiento hasta completar un polígono regular. Anoten en cada paso cuánto miden los ángulos internos marcados con un punto.

a. ¿Qué polígono se formó? ______

b. ¿Es un polígono regular? ¿Por qué? ______

______

c. ¿Cuánto suman los ángulos que marcaron? ______

d. ¿Cuántos triángulos más tuvieron que trazar para completar el polígono?

______

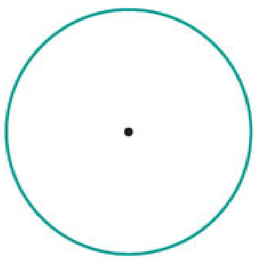
Segunda construcción

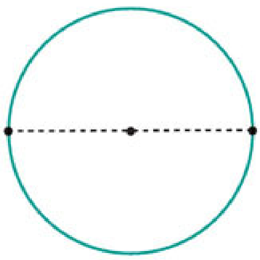
Observen las figuras y describan el procedimiento.

i. ______

______

______



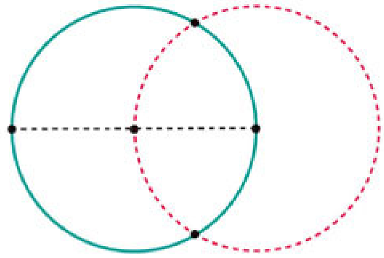


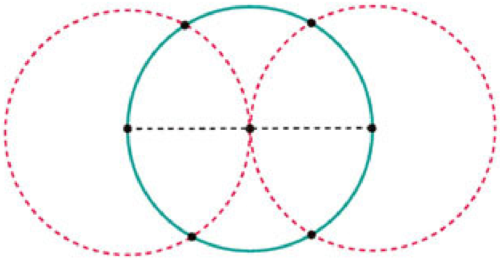
ii. ______

______

______

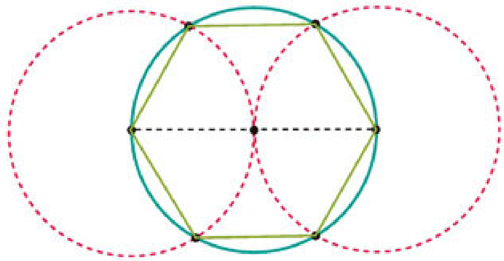
iii. ______





iv. ______

v. ______



a. ¿Por qué se puede asegurar que el hexágono que se forma es regular? ______

b. ¿Cuánto miden los ángulos internos del polígono? ¿Por qué? ______

c. ¿Cómo son las circunferencias que se trazan? ¿Por qué deben ser así? ______

d. Unan con segmentos los vértices del hexágono con el centro. ¿Cómo son los triángulos que se forman? ¿Por qué? ______

e. Comparen el procedimiento que escribieron con el que se usó para trazar un triángulo equilátero en la lección anterior. ¿Qué tienen en común? ______

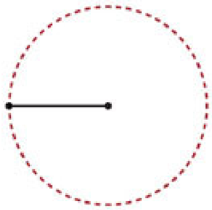
f. Reúnanse con otros dos compañeros y analicen si la explicación que dieron en los incisos *a* y *b* son correctas. En caso contrario, compleméntenla.

- **Comparen en grupo ambos procedimientos y analicen si es posible utilizarlos para trazar un octágono y por qué. Luego, comenten qué tendrían que hacer para trazar un hexágono regular cuyos lados midan 3 cm.**

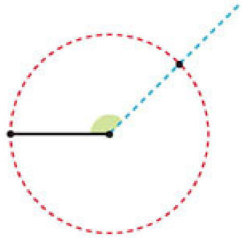
Lección 3 Con ángulos internos

1. Sigue los pasos para construir un octágono regular en tu cuaderno.

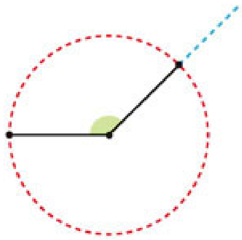
i. Traza un segmento. Abre el compás para trazar una circunferencia con radio igual a la medida del segmento y con centro en uno de los extremos.



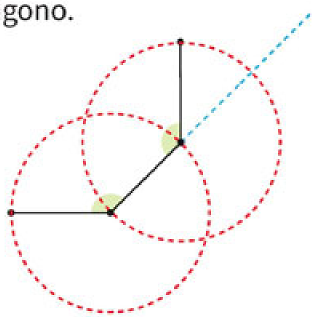
ii. Con un transportador y una regla, traza un segmento de recta con un ángulo de 135°. Marca el punto donde se intersecan el segmento y la circunferencia.



iii. Une el punto donde se intersecan el segmento con la circunferencia y el vértice del ángulo para trazar el lado del octágono.



iv. Repite el procedimiento sobre el punto de intersección para trazar otro lado del octágono. Continúa con el proceso hasta formar el octágono.



a. ¿Por qué el ángulo que se utiliza debe medir 135°? ______________________

____

b. ¿Por qué se puede garantizar que todos los lados son iguales? ______________

____

2. Responde y traza un pentágono regular.

a. ¿Cuál debe ser la medida de sus ángulos interiores? ¿Por qué? ______________

____

____

____

- **Pide a un compañero que compruebe que el pentágono que trazaste sea regular. Luego comenten en grupo si tuvieron alguna dificultad al trazarlo.**

PUNTO DE LLEGADA

Aplica lo que aprendiste.

1. Construye un cuadrado. Considera que el segmento es una de sus diagonales.

a. ¿Qué propiedades tienen las diagonales de un cuadrado? ______________________

____

b. Escribe las instrucciones para reproducir el trazo. ______________________

____

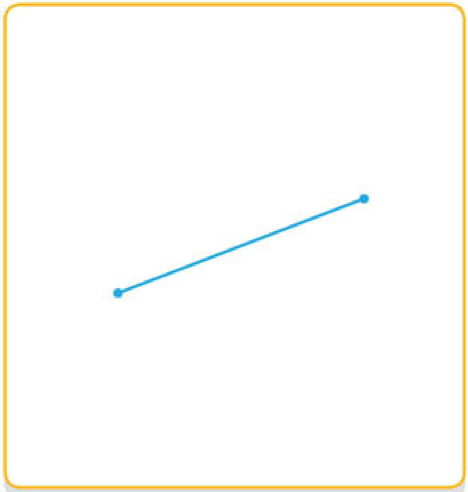
____

____

____

____

____



2. Construye un teselado regular, en tu cuaderno, a partir de la siguiente figura. Usa regla, compás y transportador.

a. Explica qué características tienen las figuras geométricas que están alrededor del hexágono regular. ______________________

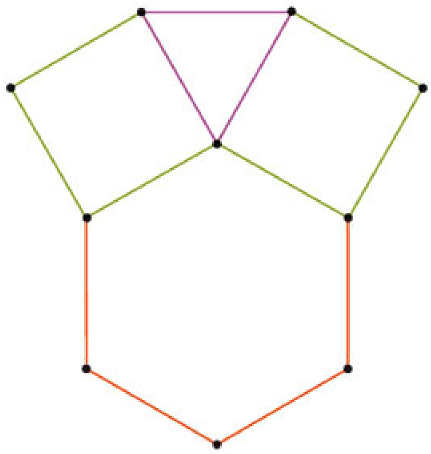
____

b. ¿Por qué se pueden usar estar tres figuras para llenar el espacio alrededor de un punto? ______________________

____

____

____



3. Con los procedimientos vistos, traza un dodecágono y un heptágono regulares. Redacta las instrucciones en tu cuaderno para que otro compañero construya los polígonos como tú lo hiciste.

- **Compara tus respuestas y tus trazos con los de tus compañeros. Luego comenten qué polígonos les costó trabajo trazar y analicen a qué se debió esa dificultad.**

Secuencia didáctica

29

Perímetro de polígonos

Aprendizaje esperado: Calcularás el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Lección 1 Polígonos regulares

PUNTO DE PARTIDA

1. Anota en las tablas el nombre, el número de lados y la medida de cada lado de cada polígono regular. Considera que el perímetro de cada polígono es de 12 cm.

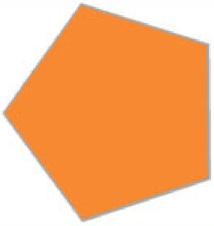
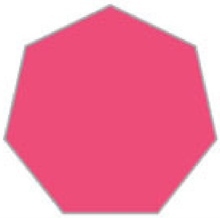
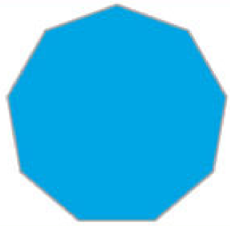
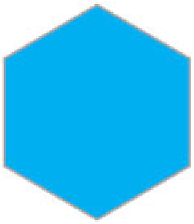
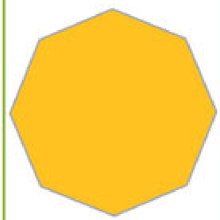
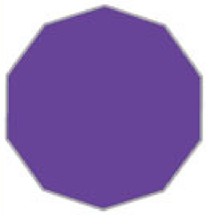
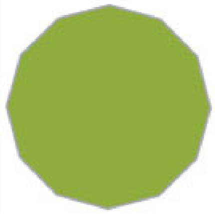
Figura			
Nombre del polígono			
Número de lados			
Medida de cada lado			

Figura				
Nombre del polígono				
Número de lados				
Medida de cada lado				

a. ¿Qué características se tienen que cumplir para que un polígono sea regular?

____

b. ¿Cómo calculas el perímetro de cada uno de estos polígonos si conoces la medida de uno de sus lados? ____

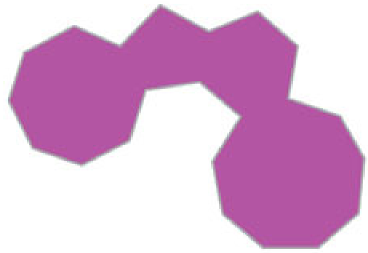
____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros.**

El perímetro de polígonos regulares

1. **Observa las figuras formadas por polígonos regulares y responde.**

Figura 1



a. ¿Cómo se llaman los polígonos que forman la figura? ______________________

____

b. Si los lados del primer polígono miden 7 cm, ¿cuánto mide el perímetro de la figura?

____

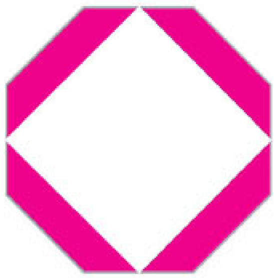
Figura 2

La figura verde está formada por un pentágono que comparte un lado con un heptágono.

a. Si el lado de ambos polígonos mide 8 cm, ¿cuánto mide el perímetro de la figura?

____

Figura 3



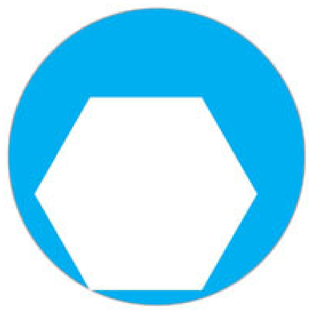
En la figura, los vértices del cuadrado coinciden con los puntos medios de cuatro de los lados del octágono.

a. Si cada lado del octágono mide 6 cm y cada lado del cuadrado mide 10.24 cm, ¿cuánto mide la suma de los perímetros de los trapecios que se forman?

____

Practicar para avanzar

1. Observa la figura y contesta.
La circunferencia tiene un radio de 4 cm y los lados del hexágono regular miden 3 cm.



a. ¿Cuánto mide el perímetro de la región azul?

____

Comenta con tus compañeros por qué y en qué casos es útil calcular el perímetro de una figura poligonal. ¿Qué aplicaciones prácticas tiene calcular el perímetro de un polígono regular?

Lección 2 Perímetros de polígonos con expresiones algebraicas

1. **Observa las figuras, lee sus descripciones y contesta.**

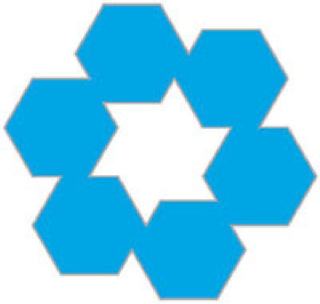


Figura 1

La figura azul está formada por 6 hexágonos regulares que comparten la mitad de dos de sus lados con otro hexágono. Si cada lado de los hexágonos mide *b* cm…

a. ¿Cuánto mide el perímetro exterior de la figura? ______

b. ¿Cuánto mide el perímetro interior de la figura? ______

c. ¿Cuál es la suma de los perímetros interno y externo? ______

d. ¿Cuál sería la suma de los perímetros de los seis hexágonos si no estuvieran unidos entre sí? ______

e. Explica por qué la diferencia entre estos dos perímetros totales es $6b$, si solamente se observan 6 lados compartidos de $\frac{1}{2}b$ cada uno. ______

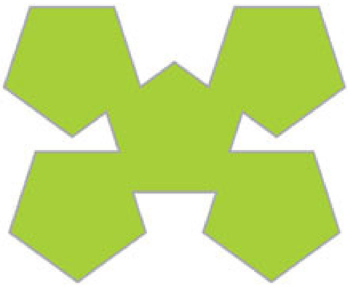


Figura 2

La figura verde está formada por 4 pentágonos regulares que comparten la mitad de uno de sus lados con el pentágono regular del centro.

a. Si los lados de los pentágonos miden *r* cm, ¿cuánto mide el perímetro de la figura? ______

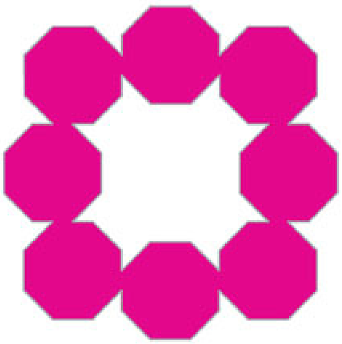


Figura 3

La figura rosada está formada por 8 octágonos regulares que comparten la mitad de dos de sus lados con otro.
Si los lados de los octágonos miden *f* cm…

a. ¿Cuánto mide el perímetro exterior de la figura? ______

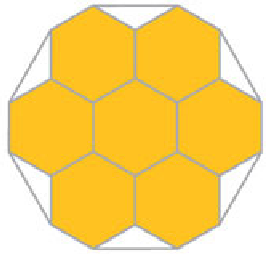
b. ¿Cuánto mide el perímetro interior de la figura? ______

c. ¿Cuál es la suma de ambos perímetros ______

d. ¿Cuál sería la suma de los perímetros de los ocho octágonos si no estuvieran unidos entre sí? ______

e. Explica por qué la diferencia entre estos dos perímetros totales es $8f$, si solamente se observan 8 lados compartidos de $\frac{1}{2}f$ cada uno. ______

Figura 4



El perímetro de la figura que se muestra mide 132 cm y el perímetro de cada uno de los hexágonos regulares amarillos es de 60 cm.

a. ¿Cuánto mide el perímetro de cada uno de los triángulos isósceles blancos? ____________________

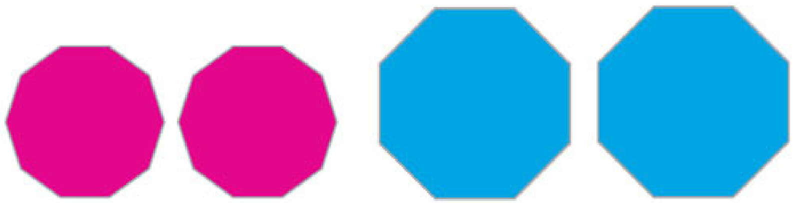
- **Comparte tus respuestas con tus compañeros y comenten si es posible asignar variables a los lados de los polígonos para resolver problemas.**

Aplica lo que aprendiste.

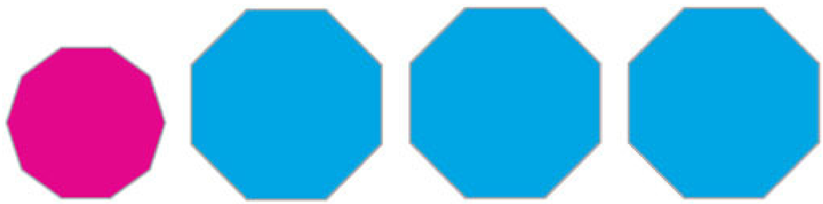
PUNTO DE LLEGADA

1. Lee el problema y establece un sistema de ecuaciones. Luego resuelve el sistema, en el recuadro, para obtener la respuesta.

La suma de los perímetros de los dos decágonos regulares y de los dos octágonos regulares que se muestran es igual a 140 cm.



Si la suma de los perímetros de un decágono y tres octágonos es igual a 150 cm, ¿cuánto mide cada lado de los decágonos y cuánto mide cada lado de los octágonos?



- **Comenten en grupo cómo establecieron el sistema de ecuaciones, cuáles fueron las incógnitas y cómo se relacionan estas para formar cada ecuación.**

Secuencia didáctica

30

Más de polígonos regulares

Aprendizaje esperado: Deducirás y usarás la relación entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

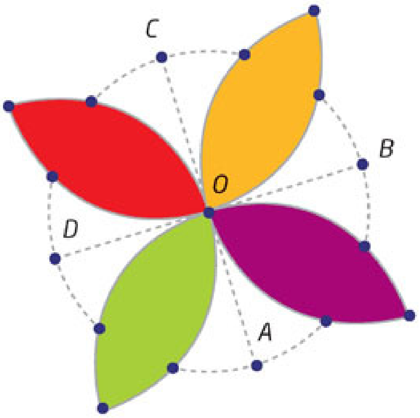
Lección 1

Polígonos regulares inscritos en una circunferencia

PUNTO DE PARTIDA

1. **Reúnete con un compañero, lean la información y respondan.**

Es común que asociemos formas de la Naturaleza con representaciones geométricas. Además, las formas geométricas permiten hacer magníficas obras de arte. La geometría también está presente en el diseño de aparatos. Un ejemplo de esto último son las aspas de un ventilador, que se asemejan a una flor de cuatro pétalos.



a. ¿Qué características comparten estos cuatro pétalos? ______

b. ¿Qué polígonos regulares inscritos en la circunferencia podrían trazar? ______

c. ¿Cuántas circunferencias se usaron para hacer esta construcción? Justifiquen su respuesta. ______

- **Comenten sus respuestas con su profesor.**

Rosa de cuatro pétalos

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Sigue las instrucciones para trazar un cuadrilátero en una hoja de papel. Identifica con una letra los elementos geométricos que utilices.**

   i. Dibuja un segmento y úsalo como radio para trazar una circunferencia con el compás.
   ii. Traza el diámetro de la circunferencia que contenga el radio que trazaste.
   iii. Con base en el diámetro que trazaste, dibuja otro que sea perpendicular al primero.
   iv. Marca los puntos donde se intersecan los diámetros con la circunferencia, y únelos para trazar el cuadrilátero.

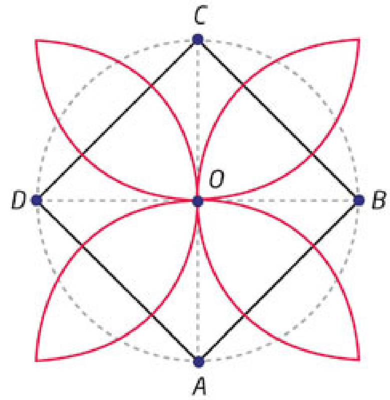
Herramientas académicas

También puedes entrar a la página de GeoGebra para hacer la actividad.

a. ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Cómo lo sabes? Justifica tus respuestas con argumentos geométricos. ______

2. **Observa la imagen y sigue las instrucciones para construir la rosa de los cuatro pétalos sobre el trazo que hiciste. Considera que los elementos geométricos en tu trazo pueden estar identificados con otra letra.**

En la imagen se denotan al centro de la circunferencia con la letra *O* y a los vértices del cuadrilátero con las letras *A, B, C* y *D*.

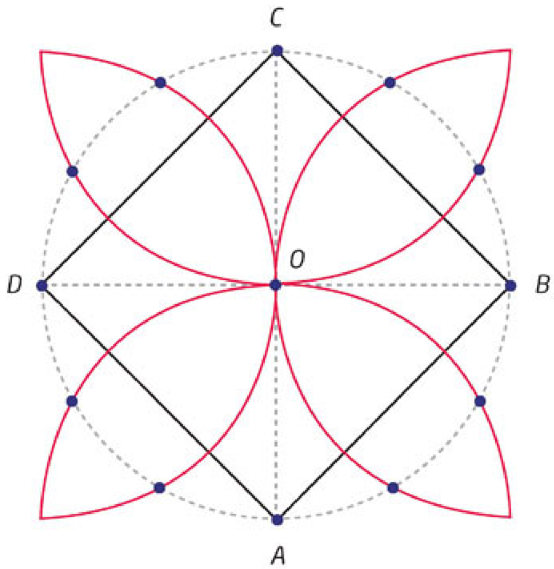


i. Traza una circunferencia con centro en el punto *A* y cuyo radio sea el segmento que une a los puntos *A* y *O* ($\overline{AO}$).
ii. Repite el procedimiento sobre los demás vértices del cuadrilátero.
iii. Remarca la rosa de los cuatro pétalos.

3. **Lee la situación y haz lo que se pide.**

Una estudiante de segundo de secundaria dice que, si se marcan los puntos donde los pétalos intersecan a la circunferencia, entonces se puede trazar un triángulo equilátero, un hexágono regular, un octágono regular y un dodecágono regular.

a. Utiliza diferentes colores para comprobar que se pueden trazar los polígonos que se mencionan. Usa un color diferente para cada polígono. Realiza tus trazos en la figura de la derecha.



- **Analiza la construcción del cuadrilátero y comenta con tus compañeros qué datos conocías para realizar el trazo y si podrías aplicar el procedimiento para trazar algún otro polígono regular.**

Practicar para avanzar

1. Gina, una alumna de segundo de secundaria, afirma que el cuadrilátero que trazaron es un rombo, porque tiene sus cuatro lados iguales. Alberto afirma que es un cuadrado.

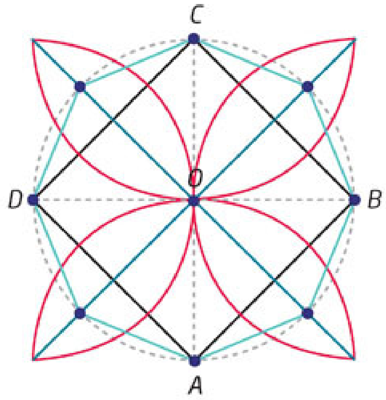
   a. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué? Analiza la figura y justifica tu respuesta con argumentos geométricos. ______________________________
   ____
   ____

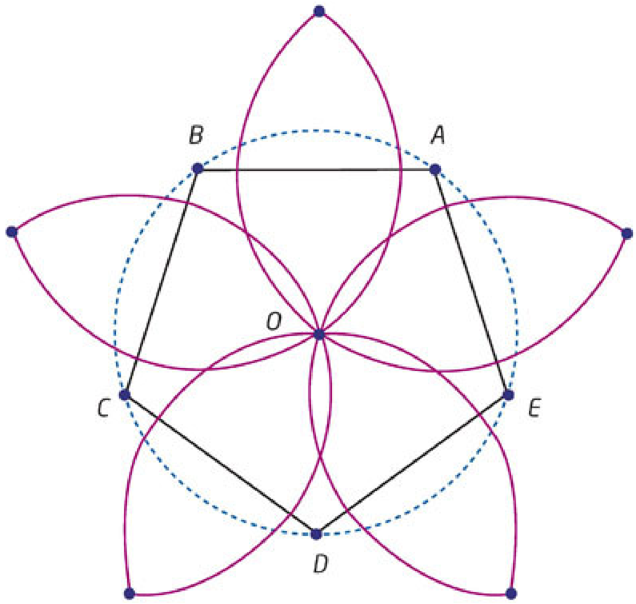
Con más lados

1. Analiza la situación y haz lo que se pide.

Carlos pudo trazar un octágono usando la rosa de los cuatro pétalos. Para eso unió con un segmento las puntas de cada pétalo con el centro de la circunferencia. Luego marcó donde esos segmentos se intersecaban con la circunferencia y unió los puntos.

a. Utiliza como ejemplo lo que hizo Carlos en la figura de la izquierda para trazar un nuevo polígono en la figura de la derecha.





b. ¿Qué polígono se formó en la figura de la derecha? ___________________

c. ¿Qué relación hay entre el número de lados de los polígonos que se formaron con los pétalos y el número de lados de la figura original? ___________________

d. Si el polígono original tuviera 8 lados, ¿cuántos tendría el polígono que se formaría? ___________________

e. Traza en tu cuaderno un dodecágono regular. Utiliza lo aprendido en la secuencia 28 y en esta lección.

- **Muestra tus trazos a tus compañeros y comenta tus respuestas. Analicen si es posible hacer lo mismo con otros polígonos.**

No todos los polígonos regulares se pueden construir con regla y compás. Sin embargo, cuando es posible construir un polígono regular de n lados, entonces también se puede construir uno de $2n$, $4n$, $8n$... número de lados.

Para ello, se inscribe el polígono regular en una circunferencia y se trazan los pétalos y los segmentos como lo han hecho en la actividad anterior. A estos segmentos se les conoce como **mediatrices**.

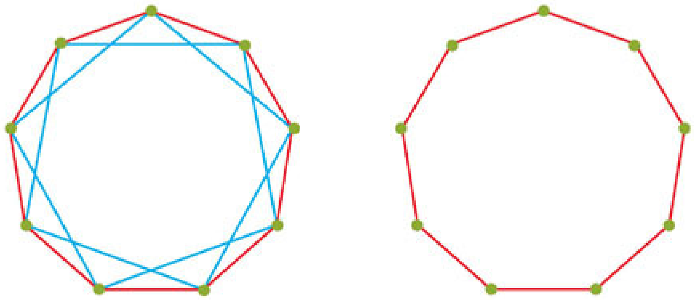
Aplica lo que aprendiste.

1. Reúnete con un compañero, lean la información y hagan lo que se pide.

PUNTO DE LLEGADA

Un polígono estrellado es un polígono con forma de estrella que se construye al unir, de forma continua, los vértices no consecutivos de un polígono regular.

a. Observen el polígono estrellado de la izquierda. Tracen uno diferente a partir del eneágono regular de la derecha.



Ambos polígonos estrellados son eneágonos estrellados regulares. Para diferenciarlos, se nombran con una fracción. El numerador indica el número de vértices del polígono; y el denominador, el tamaño de cada salto. Para formar un polígono regular estrellado, el denominador debe ser menor que la mitad del numerador y la fracción debe ser irreducible.

- ¿Cómo se llaman los eneágonos estrellados regulares? ______________________

____

- ¿Cuántos eneágonos estrellados regulares se pueden trazar? ¿Por qué? __________

____

____

2. En una hoja de papel, construye un polígono regular estrellado de 16 lados. Escribe en tu cuaderno los pasos que seguiste.

a. Intercambia tus instrucciones con un compañero y sigan los pasos que indican.
b. Comprueben que obtuvieron polígonos regulares.
c. Si no es posible, señalen las instrucciones que no sean claras y sugieran cómo corregirlas.

3. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

A partir de lo aprendido en esta secuencia y las anteriores sobre polígonos regulares, pídele a tu compañero que trace en su cuaderno un polígono regular. Indícale la longitud de sus lados, el radio de la circunferencia o a partir de qué polígono lo debe trazar. Anoten el procedimiento que utilizaron, intercámbienlo y revísenlo.

- **Comenten con sus compañeros qué dificultades tuvieron al trazar los polígonos y cómo las solucionaron.**

Cómo trazar un polígono inscrito en una circunferencia

Al trazar polígonos regulares de *n* lados a partir de sus ángulos internos o ángulos centrales, a veces es necesario aproximar el valor del ángulo. Esto induce un error en la construcción del polígono.

Una alternativa es el siguiente procedimiento, en el cual no se requiere aproximar valores.

En parejas sigan las instrucciones para trazar un polígono de siete lados.

1. Entren a la página de GeoGebra y den clic en "GeoGebra Geometría".
2. Usando la herramienta básica Circunferencia, tracen una circunferencia de cualquier tamaño. Al trazar la circunferencia aparecerán dos puntos, el centro *A* y el punto *B* sobre la circunferencia.
3. Con la herramienta Recta, unan ambos puntos para trazar el eje. Luego, con la herramienta Punto, marquen el lugar donde se intersecan el eje y la circunferencia. Oculten el punto *A* con la herramienta de edición Mostrar/ocultar objeto.

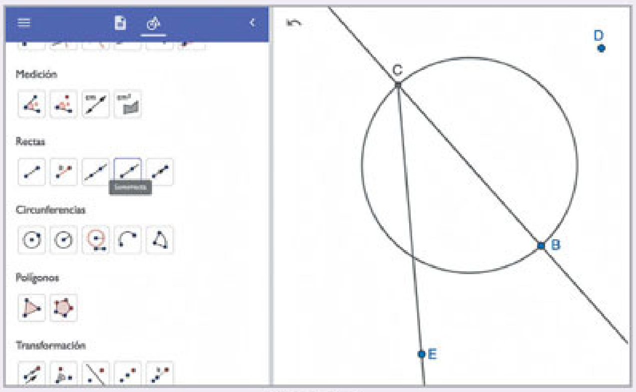


Imagen 1

4. Con la herramienta Mediatriz den clic a los puntos *B* y *C*. Ubiquen un punto *D* sobre la mediatriz y luego ocúltenla como hicieron con el punto *A*.
5. Tracen una semirrecta a partir del punto *C* que atraviese la circunferencia. Con la herramienta Circunferencia (centro, radio), dibujen una circunferencia con el centro en *C* y radio 1. Marquen el punto donde se intersecan la circunferencia que acaban de trazar y la semirrecta.
6. Tracen otras seis circunferencias de radio 1 utilizando como centro el punto donde se interseca la circunferencia anterior con la semirrecta, como se muestra en la imagen 2.

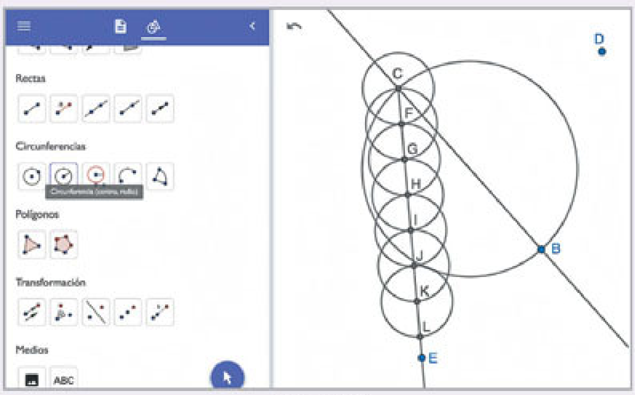


Imagen 2

7. Unan el último punto que hallaron con el punto *B* utilizando la herramienta Recta. Luego tracen rectas paralelas a la anterior que pasen por los puntos sobre la semirrecta, como en la imagen 3.

8. Marquen los puntos donde se intersecan las paralelas con el eje. Ahora oculten las siete circunferencias de radio 1, las rectas paralelas, la semirrecta y los puntos que están sobre esta.

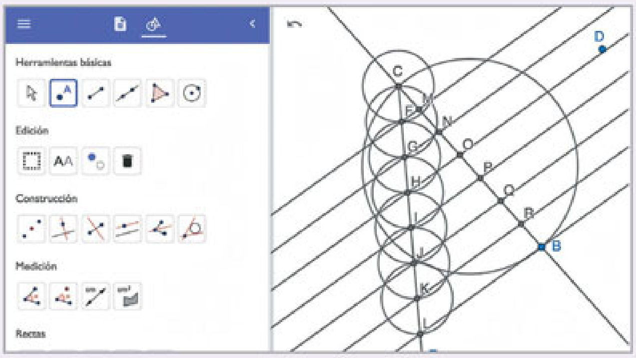


Imagen 3

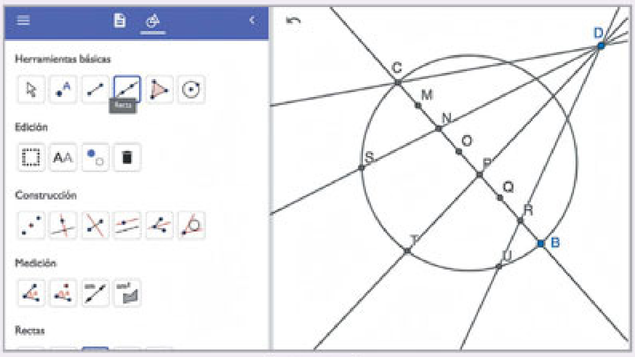


Imagen 4

9. Unan con rectas el punto *D* con los puntos marcados sobre el eje de manera alternada, iniciando con el punto *C* y ubiquen los puntos donde las rectas se intersecan con la circunferencia, como se muestra en la imagen 4. Observen que los puntos marcados están del lado contrario al eje con respecto al punto *D*.

10. Oculten las rectas y tracen rectas perpendiculares al eje que pasen por los puntos que acaban de ubicar. Nuevamente marquen el lugar donde se intersecan las rectas con la circunferencia.

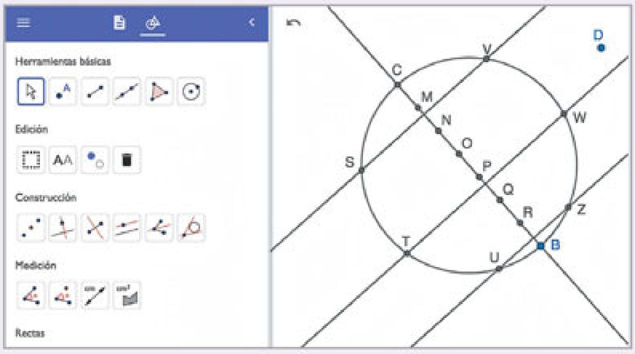


Imagen 5

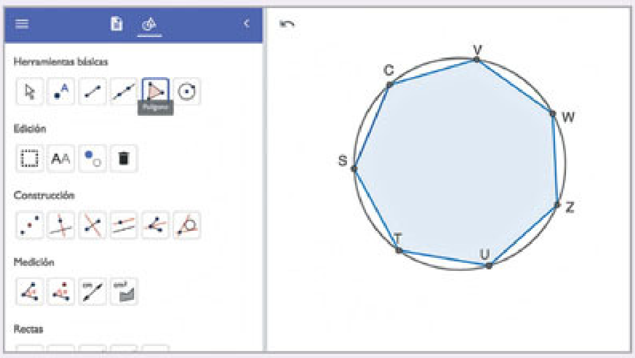


Imagen 6

11. Utilicen los puntos que están sobre la circunferencia, excepto el *B*, para trazar el heptágono, y oculten los elementos que ya no sean necesarios.

Utilicen el método descrito para trazar polígonos de 8, 9 y 10 lados. Comenten con sus compañeros qué diferencia hay entre trazar un polígono con un número par de lados y trazar uno con un número impar de lados. Concluyan con ayuda del profesor.

Secuencia didáctica

31 Histogramas y polígonos de frecuencia

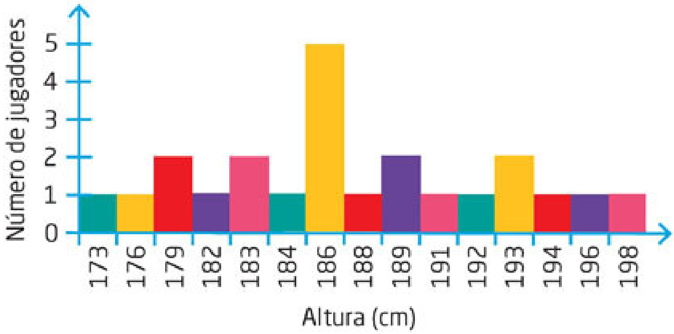
Aprendizaje esperado: Recolectarás, registrarás y leerás datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Lección 1 ¿Qué información da la gráfica?

PUNTO DE PARTIDA

1. Observa la gráfica y contesta.

La gráfica muestra la altura en centímetros de los integrantes de un equipo de basquetbol.



a. ¿Cuántos jugadores tiene el equipo? ______

b. ¿En qué valores de altura hay más jugadores? ______

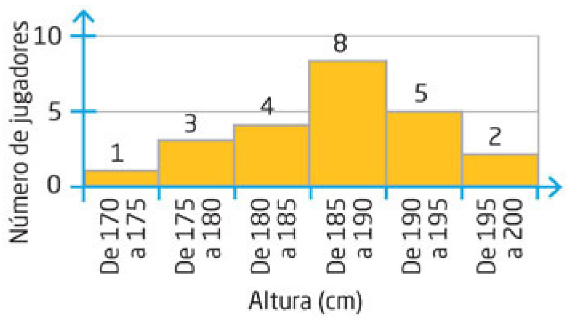
c. ¿Cuál es la altura máxima y cuál la mínima? ______

______

Histogramas y tablas de frecuencias

TRAYECTO FORMATIVO

1. En parejas, comparen la siguiente gráfica con la anterior y contesten.



a. ¿Qué diferencia hay entre las dos gráficas? ______

______

b. ¿Qué significa la leyenda “De 175 cm a 180 cm” que está en la base de las barras de la gráfica? ______

c. A esta agrupación de datos se le conoce como **intervalo.** Analicen los valores de los intervalos. ¿Cuál es la diferencia entre ambos valores? ______

d. ¿Es la misma diferencia en todos los intervalos? ¿Por qué consideran que es así?

______

______

Eje: Análisis de datos
Tema: Estadística

2. **Analicen, con base en la siguiente información, si las gráficas de la página anterior son histogramas de frecuencias. Compartan sus conclusiones con el profesor.**

Un **histograma de frecuencias** representa la relación de dos variables, la **frecuencia** en el eje *y* y una **variable cuantitativa** continua, dividida en **clases** o **intervalos**, en el eje *x*. Se dice que es continua porque toma valores que no están separados unos de otros.

Los **intervalos** representan una parte de la recta numérica y se usan para agrupar datos continuos, por ejemplo, altura, masa y tiempo, entre otros. Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados o mixtos.

Los **intervalos abiertos** se representan con paréntesis. Por ejemplo, (120, 124) es un intervalo abierto. Los paréntesis indican que dichos números, llamados **límite inferior** (120) y **límite superior** (124) no pertenecen al intervalo.

En los **intervalos cerrados** se usan corchetes. Por ejemplo, [25, 40] es un intervalo cerrado y, en este, los límites inferior y superior están incluidos en el intervalo.

Un intervalo es **mixto** cuando es abierto y cerrado. Por ejemplo, (38, 48], donde 38 no pertenece al intervalo, pero 48 sí.

A la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la variable continua se le llama **rango** (*R*). A la diferencia entre el límite superior y el inferior de cada intervalo se le llama **amplitud** (*h*).

3. **Reúnete con un compañero y a partir de la información que proporciona la gráfica de la página anterior, completen la tabla de frecuencias para datos agrupados.**

Altura en intervalos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
TOTAL		100%

- ¿Cuántas filas tendría la tabla si la elaboran a partir de la primera gráfica? ____

____

- Para un estudio estadístico con muchos datos, ¿cuál de las dos gráficas conviene utilizar? ____________________

- **Comenten sus respuestas con sus compañeros y expliquen su elección.**

Lección 2

Construcción de histogramas y polígonos de frecuencia

1. Realicen la actividad en equipos de 5. Consigan una cinta métrica y una báscula o soliciten a sus compañeros su altura en cm y su masa en kg. Completen la tabla con la información de cada integrante del equipo.

Nombre	Sexo	Masa (kg)	Altura (cm)	Talla de calzado

- ¿Cuáles datos toman valores numéricos? ____________________
- ¿Qué tipo de números son? ____________________
- ¿Qué datos son cualidades? ____________________

____

- **Comenten sus respuestas con sus compañeros.**

2. En tu cuaderno, haz una tabla de frecuencias con los datos de la masa de tus compañeros. Sigue los pasos para construirla.

i. Ordena de menor a mayor los datos.
ii. Ajusta los datos a un decimal. Redondea hacia abajo el dato mínimo y redondea hacia arriba el máximo. Luego calcula el rango.
iii. Calcula la cantidad de intervalos en que se dividirán los datos. Para esto, encuentra un número natural k tal que k^2 sea el número que más se acerque y que sea mayor o igual al número de datos.
iv. Calcula la amplitud de los intervalos dividiendo el rango entre el número k que obtuviste.
v. Lista los intervalos para la masa. Para determinar los intervalos, inicia en cada caso con el menor valor y suma a dicho valor el valor de la amplitud.

Por ejemplo: si en una lista de 40 datos, la altura mínima es de 0.90 m y la máxima es de 1.57 m, se ajustan los datos a 0.9 m y 1.6 m. Al ser 40 datos se obtiene que $k = 7$. Así se tiene que la amplitud es:

$$h = \frac{R}{k} = \frac{1.6 - 0.9}{7} = \frac{0.7}{7} = 0.1$$

Por tanto, los intervalos son [0.90, 1.00), [1.00, 1.10), [1.10, 1.20), [1.20, 1.30), [1.30, 1.40), [1.40, 1.50), [1.50, 1.60].

vi. Calcula el punto medio (x^i) de cada intervalo y completa la tabla de frecuencias.

Para calcular el **punto medio** o **marcas de clase** de un intervalo $(a, b]$ se calcula el promedio de los límites inferior y superior del intervalo.

$$x_i = \frac{a + b}{2}$$

Por ejemplo, para calcular el punto medio del intervalo [0.90, 1.00), se calcula el promedio:

$$x_i = \frac{0.90 + 1.00}{2} = \frac{1.90}{2} = 0.95$$

a. Con los datos que obtuviste, construye una **tabla de frecuencias** en tu cuaderno para la masa de los estudiantes del salón. Toma como referencia la siguiente.

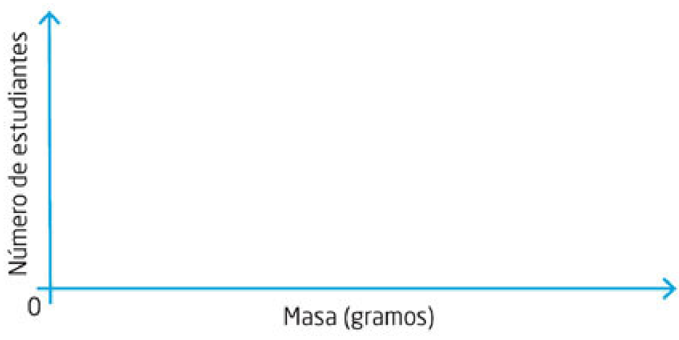
Masa en intervalos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Marca de clase

3. Reúnete con un compañero y tracen un histograma con los datos recopilados.

a. Marquen en el eje *x* la escala para representar el ancho de los intervalos y en el eje *y*, la frecuencia.

b. Marquen los puntos medios de cada intervalo en la parte superior de los rectángulos o barras que forman el histograma.

c. Unan los puntos medios. Para cerrar la línea "poligonal". unan el punto medio de cada intervalo con el siguiente. De esta manera obtienen un **polígono de frecuencias.**



Un **polígono de frecuencias** es un gráfico formado por una línea poligonal que une las marcas de clase representadas por los puntos medios de los intervalos que son la base de las barras del histograma de frecuencias.

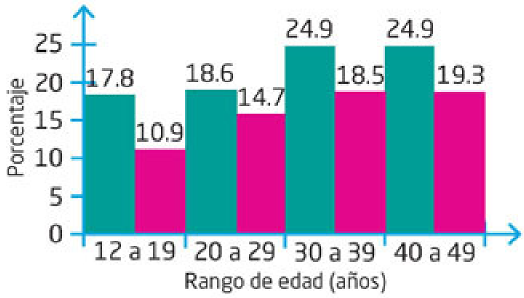
- **Comparen el histograma y el polígono de frecuencias que construyeron con los de sus compañeros de grupo. Si encuentran diferencias, analicen a qué se deben. Corrijan si lo consideran necesario.**

Comparación de datos

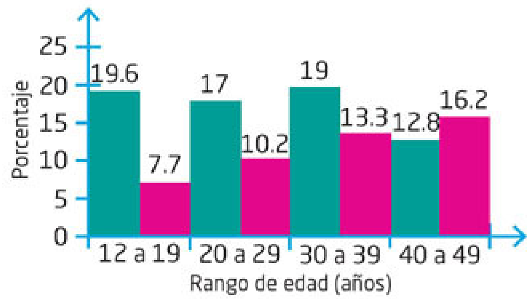
1. **En equipos, analicen la información y respondan.**

La anemia es la disminución del número y del tamaño de los glóbulos rojos. En las mujeres embarazadas puede afectar a la madre en el proceso de gestación, parto y lactancia, así como el desarrollo del bebé.

Porcentaje de mujeres con anemia en 2006 (por grupo de edad y condición de embarazo)



Porcentaje de mujeres con anemia en 2012 (por grupo de edad y condición de embarazo)



Mujeres embarazadas Mujeres no embarazadas

Fuente: cedoc.inmujeres.gob.mx/documentos_download/101256.pdf (consulta: 26 de febrero de 2018).

a. Comparen los datos de los años 2006 y 2012. ¿Qué observan? ______________________

____

b. En ambos años, ¿qué edad tiene la mayoría de las mujeres embarazadas con anemia? ______________________

c. Si analizan el comportamiento de las mujeres que no están embarazadas en ambos años, ¿qué pueden concluir? ______________________

____

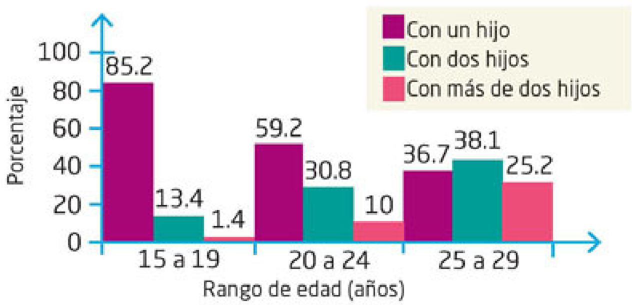
d. Calculen las marcas de clase y tracen los polígonos de frecuencia en su cuaderno.

PUNTO DE LLEGADA

Aplica lo que aprendiste.

1. **Analiza la gráfica y marca con una ✔ la información se obtiene de ella.**

Distribución porcentual de las mujeres de 15 a 29 años con al menos un hijo nacido vivo



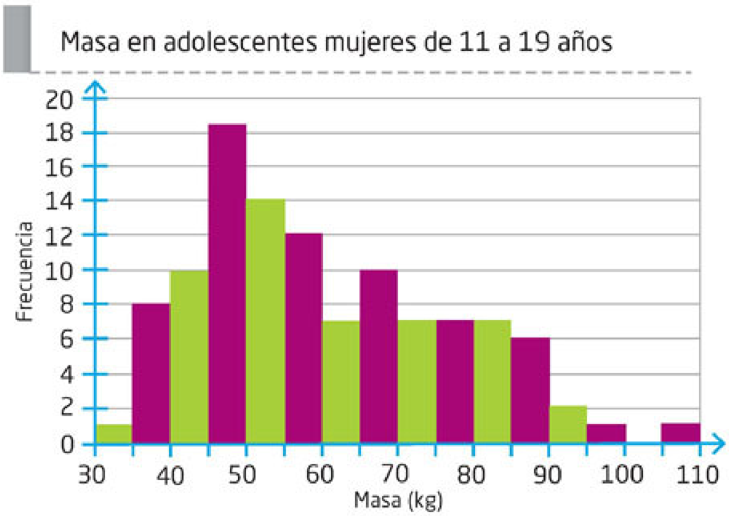
a. El mayor porcentaje de mujeres tiene entre 15 y 19 años y tiene un solo hijo. ( )

b. A medida que las mujeres tienen mayor edad, tienen más hijos. ( )

c. El menor porcentaje de madres con tres o más hijos se encuentra entre 15 y 19 años. ( )

2. **Analiza la información y responde. Argumenta tus respuestas.**

La Organización Mundial de la Salud (OMS) define la obesidad y el sobrepeso como una acumulación anormal de grasa corporal. Estos padecimientos se clasifican en función del índice de masa corporal (IMC), el cual se calcula a partir de la masa y la estatura de la persona. México ocupa el primer lugar mundial en obesidad y sobrepeso infantiles, y el segundo en adultos, después de Estados Unidos de América. La gráfica muestra los datos de un estudio realizado a adolescentes mujeres de entre 11 y 19 años, en una escuela, respecto de la obesidad y el sobrepeso.



a. ¿Qué datos se presentan en el eje x? ¿Y en el eje y? ______

b. ¿Cuál es la masa mínima? ¿Y la masa máxima? ______

c. ¿En qué intervalo de masa se encuentra la mayoría de las adolescentes? ______

d. ¿Qué masa presenta la mayor cantidad de estudiantes? ______

e. Si la masa normal de la población de esta edad está entre 50 y 60 kg, el sobrepeso entre 60 y 75 kg, y la obesidad entre 75 y 85 kg, ¿cuántas adolescentes tienen masa normal, cuántas tienen sobrepeso y cuántas tienen obesidad? ______

3. **Contesta las siguientes preguntas.**

a. ¿Qué tipo de información proporciona el histograma y cuál, el polígono de frecuencias? ______

b. ¿Qué diferencias hay entre los histogramas y las gráficas de barra? ______

- **Escriban un resumen en el que expliquen cuándo conviene utilizar un histograma y cuándo una gráfica de barras.**

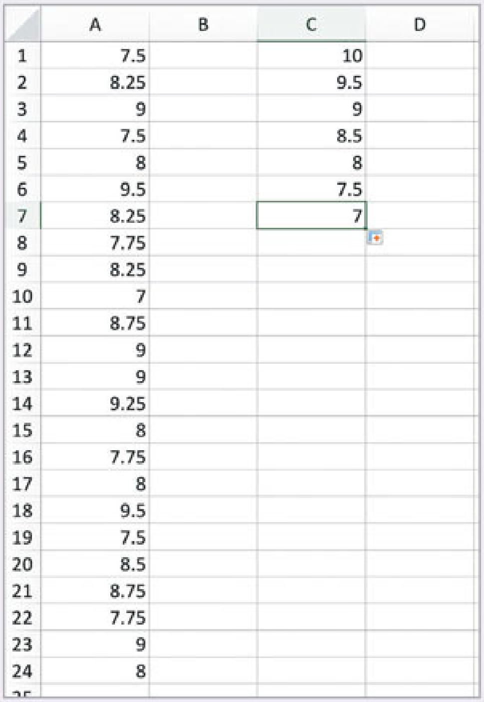
Resuelvo con tecnología

Histograma con una hoja de cálculo

Lean la situación en parejas y sigan las instrucciones para construir un histograma que represente la información obtenida.

Se encuestó a 24 adolescentes para conocer cuánto tiempo duermen cada noche entre semana. La tabla muestra el promedio de horas que cada adolescente durmió entre semana.

Número de horas promedio que durmió cada adolescente											
7.50	8.25	9.00	7.50	8.00	9.50	8.25	7.75	8.25	7.00	8.75	9.00
9.00	9.25	8.00	7.75	8.00	9.50	7.50	8.50	8.75	7.75	9.00	8.00



	A	B	C	D
1	7.5		10	
2	8.25		9.5	
3	9		9	
4	7.5		8.5	
5	8		8	
6	9.5		7.5	
7	8.25		7	
8	7.75			
9	8.25			
10	7			
11	8.75			
12	9			
13	9			
14	9.25			
15	8			
16	7.75			
17	8			
18	9.5			
19	7.5			
20	8.5			
21	8.75			
22	7.75			
23	9			
24	8			

Imagen 1

1. Anoten los datos en la columna A de una hoja de cálculo. En la columna C, anoten los valores superiores que tendrá cada intervalo, en este caso 10, 9.5, 9, 8.5, 8, 7.5 y 7.

2. Den clic en la pestaña Datos y revisen que aparezca la opción Análisis de datos, como se observa en la imagen 2.

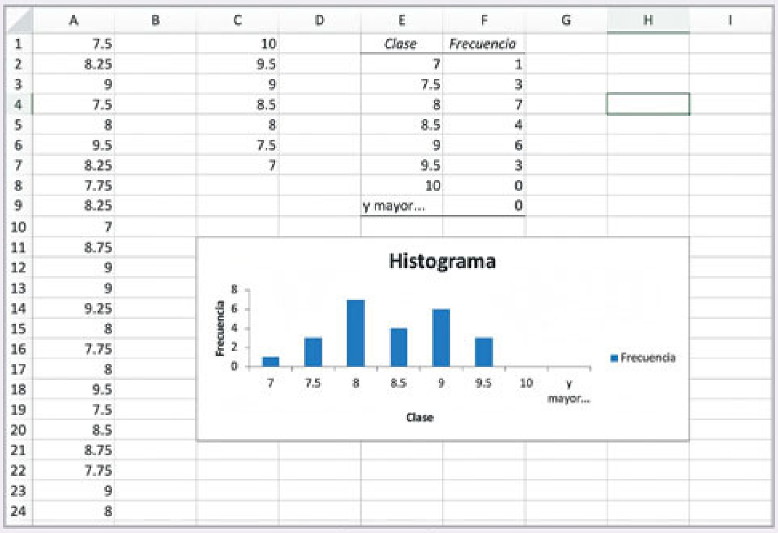
Imagen 2

Si no aparece, den clic en el menú Archivo, elijan Opciones y den clic en Complementos. En el cuadro Administrar seleccionen Complementos de Excel y den clic en Ir. En el cuadro Complementos activen la opción Análisis de datos y den clic en Aceptar.

3. Den clic en Análisis de datos y elijan la opción Histograma. En la casilla Rango de entrada, ingresen el rango "$A$1:$A$24", que corresponde a los datos de la encuesta; en Rango de clases ingresen los valores superiores de los intervalos con el rango "$C$1:$C$7", y en Rango de salida ingresen "$E$1", como se muestra en la imagen 3. Activen la opción Crear gráfico y den clic en Aceptar.

Imagen 3

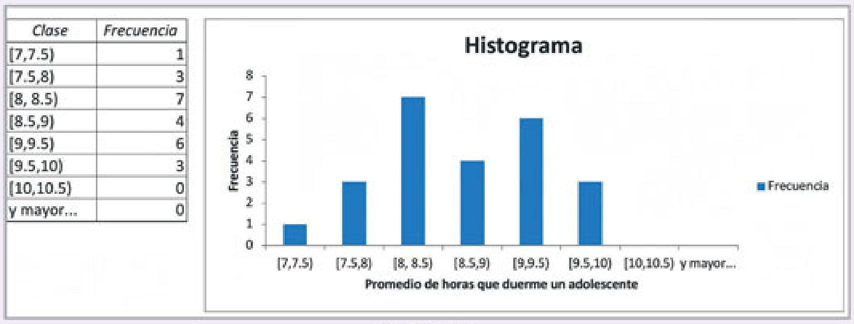
4. Aparecerán la tabla y el histograma correspondiente. Revisen que los datos ingresados coincidan con los que muestran la tabla y el histograma.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	7.5		10		*Clase*	*Frecuencia*			
2	8.25		9.5		7	1			
3	9		9		7.5	3			
4	7.5		8.5		8	7			
5	8		8		8.5	4			
6	9.5		7.5		9	6			
7	8.25		7		9.5	3			
8	7.75				10	0			
9	8.25				y mayor...	0			
10	7								
11	8.75								
12	9								
13	9								
14	9.25								
15	8								
16	7.75								
17	8								
18	9.5								
19	7.5								
20	8.5								
21	8.75								
22	7.75								
23	9								
24	8								

Imagen 4

5. Para hacer más clara la información, pueden modificar los datos que aparecen en la columna "Clase". Los cambios se reflejarán también en el histograma. Modifiquen los encabezados de los ejes y los intervalos de los datos, como se muestra en la imagen 5.



Clase	*Frecuencia*
[7,7.5)	1
[7.5,8)	3
[8, 8.5)	7
[8.5,9)	4
[9,9.5)	6
[9.5,10)	3
[10,10.5)	0
y mayor...	0

Imagen 5

6. Para eliminar el espacio que queda entre las columnas, coloquen el ratón sobre una barra, den clic con el botón derecho, elijan Dar formato a la serie de datos, y anoten 5% en el ancho del intervalo.

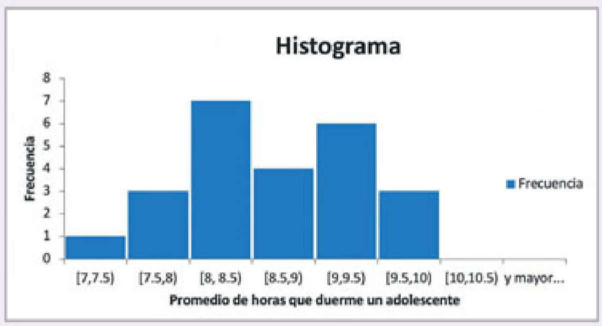


Imagen 6

Observen que, si modifican los datos de frecuencia en la tabla, el histograma también cambiará. Practiquen construyendo sus propios histogramas a partir de lo trabajado en la secuencia 31.

Probabilidad frecuencial y teórica

Aprendizaje esperado: Determinarás la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Lección 1 ¿Cuál es la probabilidad?

PUNTO DE PARTIDA

1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

a. Respondan las preguntas.

- Si lanzan una moneda al aire, ¿cuál es la probabilidad de que salga sol? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que salga águila? ______
- Expliquen sus respuestas. ______

b. Consigan una moneda y, por turnos, láncenla al aire 10 veces. En la tabla, anoten una A si cae águila o S si cae sol.

Lanzamiento (L)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado (R)										

- ¿Cuántas veces salió sol? ______
- ¿Cuántas veces salió águila? ______
- ¿Se acercan los resultados a los que esperabas en el inciso *a*? ______
- ¿Por qué sucede esto? ______

- **Comparen sus respuestas con sus compañeros y analicen lo que sucedió en cada caso.**

Probabilidad frecuencial

TRAYECTO FORMATIVO

1. En parejas analicen la frecuencia de los resultados posibles al lanzar dos monedas.

a. Por turnos lancen ambas monedas y completen la tabla con AA, AS o SS según sea el resultado.

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										

b. Cuenten cuántos resultados de cada uno obtuvieron y compárenlos con los de otras parejas. ¿Los resultados son iguales? ______

c. Lancen ambas monedas 50 veces y registren los resultados en su cuaderno.

2. **Reúnan los resultados obtenidos por otros equipos y completen la tabla.**

Número de lanzamientos	Frecuencia absoluta (FA)			Frecuencia relativa (FR)		
	AA	SS	AS o SA	AA	SS	AS o SA
10						
50						
100						
200						
400						

a. ¿Las frecuencias de los eventos son las mismas para las diferentes cantidades de lanzamientos? ______

b. ¿Qué esperarían que suceda si se aumenta la cantidad de lanzamientos? ______

______

c. Calculen la probabilidad frecuencial de cada evento para la mayor cantidad de lanzamientos. Recuerda que la probabilidad frecuencial ($P_f(M)$) de un evento M se calcula dividiendo el número de veces que ocurre el evento entre el número de veces que se efectúa el experimento.

$P_f(AA)$: ______ $P_f(SS)$: ______ $P_f(AS\ o\ SA)$: ______

Practicar para avanzar

1. Para ganar un juego de "Serpientes y escaleras", Rafael necesita avanzar 6 casillas. ¿Cuál es la probabilidad de que gane en un turno? Responde las preguntas para resolver el problema.

a. ¿Cuántas caras tiene el dado? ______

b. ¿Cuántas veces aparece el 6 en el dado? ______

c. ¿Cuál es la probabilidad esperada? ______

d. Expresa tal probabilidad como fracción, como decimal y como porcentaje. ¿Qué significa ese valor? ______

______

e. Con un dado, realiza el experimento 100 veces y dibuja una tabla en tu cuaderno como la siguiente para registrar tus resultados

Lanzamientos	Números obtenidos										Número de veces que salió el 6	Probabilidad frecuencial del 6
1 a 10												
...												

Comparen la probabilidad obtenida en la tabla con la probabilidad esperada. Comparen sus respuestas con sus compañeros y analicen lo sucedido.

Probabilidad teórica

1. **En equipos, retomen el experimento de las dos monedas y hagan lo que se pide para responder el problema.**

¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar dos monedas al aire, salga águila y sol (AS o SA)?

a. Completen la tabla para saber cuáles resultados pueden obtenerse al lanzar dos monedas al aire.

	A	S
A	AA	
S		

En probabilidad, a cada resultado posible (RP) de un experimento se le conoce como **punto muestral**. Al conjunto formado por todos los resultados posibles o puntos muestrales se le conoce como **espacio muestral**. Por ejemplo, el espacio muestral al lanzar dos monedas al aire está constituido por los puntos muestrales AA, AS o SA y SS.

Se llama **suceso o evento** a cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, el evento donde salgan dos águilas o dos soles (AA o SS).

Se dice que un resultado es **favorable (RF)** si el punto muestral pertenece al evento.

b. Con la información anterior, completa la tabla.

Evento	Número de resultados favorables (RF)	Número de resultados posibles (RP)	Razón: $\frac{RF}{RP}$
AA			
AS o SA			
SS			

Se llama probabilidad teórica $P_t(M)$. de un suceso o evento M al cociente o razón del número de resultados favorables entre el número de resultados posibles.

$$P_t(M) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$$

- **Comparen los resultados de la probabilidad frecuencial, calculados al inicio de la secuencia, con la probabilidad teórica de cada evento y comenten con sus compañeros qué relación hay entre ambas probabilidades conforme aumenta el número de lanzamientos.**

2. **Sigue los pasos para calcular la probabilidad de que, al lanzar un dado, el resultado sea un número par.**

   a. Escribe el espacio muestral que se obtiene al lanzar un dado.

   ____

   b. Escribe los elementos de cada uno de los siguientes eventos.
   - Evento A: Sacar 1 al lanzar un dado. ______________
   - Evento B: Sacar un número par al lanzar un dado. ______________

> Un evento **simple** es aquel que tiene un solo resultado o punto muestral.
> Un evento es **compuesto** si está formado por más de un resultado.

   c. ¿Cuáles son los resultados posibles de sacar par al lanzar un dado? ________

   d. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar un dado, se obtenga un número par?

   ____

   e. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar un dado, se obtenga un número impar?

   ____

   f. ¿Cómo son ambas probabilidades? ¿A qué se debe que suceda esto? ________

   ____

Practicar para avanzar

Lee los problemas y responde en tu cuaderno.

1. Para decidir quién comienza en un juego de mesa, cuatro amigos eligen lanzar un dado y dar el primer turno a quien saque 6. Uno de ellos pide que, en vez de que empiece quien saque 6, inicie quien saque 1.

   a. ¿Crees que alguien obtiene ventaja con en esta propuesta? ¿Por qué?

2. En otro ejercicio, cuatro estudiantes metieron cuatro canicas de diferente color en una bolsa. Cada uno eligió un color y, por turnos, sin ver, sacaron una, registraron el color y la devolvieron. Después de 500 extracciones, ganó aquel cuyo color salió más veces. La tabla muestra los resultados.

Canica roja	Canica verde	Canica amarilla	Canica azul
133	140	117	110

   a. ¿Quién ganó?
   b. ¿Los resultados obtenidos se aproximan a la probabilidad teórica? ¿Por qué?
   c. Calcula la probabilidad teórica de que salga cada canica.

Lección 3

Comparación entre ambas probabilidades

1. **Analiza el experimento y realiza lo que se pide.**

Experimento: Sumar los resultados obtenidos al lanzar un par de dados.

a. Las tablas de doble entrada ayudan a contar todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Completa la tabla para obtener los resultados posibles de sumar ambos dados.

SUMA	1	2	3	4	5	6
1	2					
2		4				
3						
4						
5				9		
6						

b. Enlista todos los resultados posibles. ______

c. ¿Cuál suma tiene la mayor cantidad de posibles resultados favorables? Nombra *M* a ese evento. ______

d. Escribe los resultados favorables para dicho evento. ______

______

e. Escribe los resultados favorables para cada resultado posible.

- Evento *B*: que la suma sea 2. ______
- Evento *C*: que la suma sea 6. ______
- Evento *D*: que la suma sea 12. ______
- Evento *E*: que la suma sea un número par. ______

  ______
- Evento *F*: que la suma sea múltiplo de 3. ______

  ______

f. Calcula la probabilidad teórica de cada evento.

$P_t(B) =$ ______ $P_t(M) =$ ______

$P_t(C) =$ ______ $P_t(E) =$ ______

$P_t(D) =$ ______ $P_t(F) =$ ______

- **Explica cómo calculaste la probabilidad de los eventos simples y de los eventos compuestos.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. En parejas, lean las instrucciones del juego y hagan lo que se pide.

Carrera de automóviles

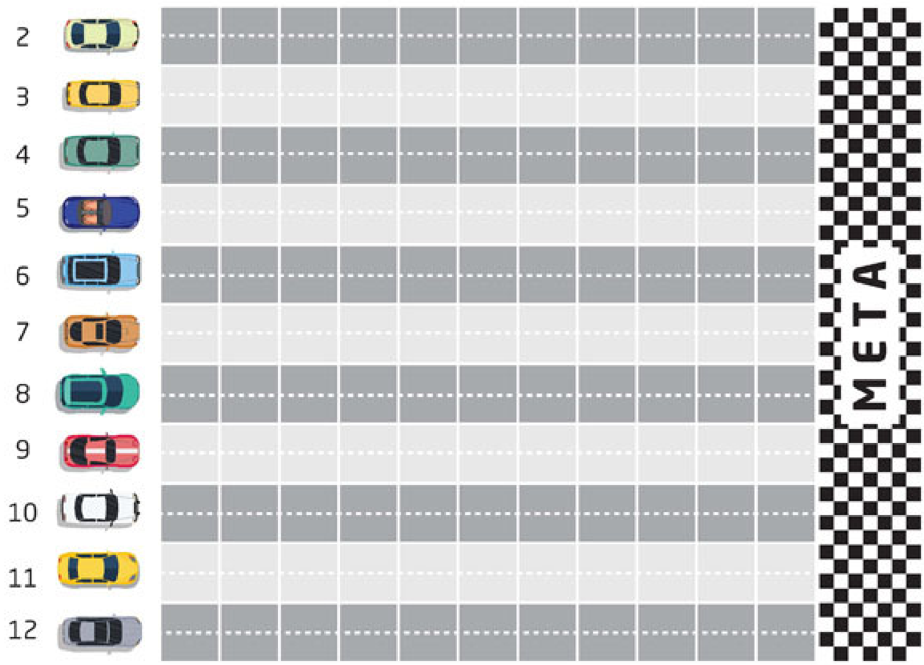
- Por turnos, cada jugador escoge un número de automóvil del 2 al 12.
- Cada jugador lanza dos dados y avanza un lugar en la pista cuando la suma de ambos coincide con el número del automóvil. Marquen con taches los avances.
- Gana el primero que llegue a la meta.

a. ¿Todos los automóviles tienen la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?

____

b. ¿Qué número de automóvil te conviene elegir? ______________________________

c. Jueguen y después contesten las preguntas.



- ¿Qué número de automóvil ganó? ______________________________
- ¿Cuál es la probabilidad teórica del número del automóvil ganador? __________
- ¿Coincide el número de automóvil ganador con el automóvil que tiene mayor probabilidad teórica de ganar? ______________________________
- ¿Por qué consideran que sucede esto? ______________________________
- A partir de lo que aprendieron en la secuencia, describan lo que entienden por probabilidad teórica y probabilidad frecuencial. ______________________________

____

- **Compartan sus respuestas con sus compañeros. Juntos concluyan qué diferencias existen entre ambas probabilidades y comenten por qué es importante conocerlas.**

Punto de encuentro

Lee, haz las actividades y responde.

Migración de las mariposas monarca

Las mariposas monarca migran cada año desde Estados Unidos y Canadá hacia los bosques de oyamel y pino de Michoacán y el estado de México para **hibernar**, alimentarse y reproducirse. Viajan en colonias de más de 20 millones de individuos y recorren distancias de entre 2 500 km y 4 000 km. La migración se inicia a mediados o finales de agosto y las mariposas llegan al centro de México a principios de noviembre.

El ciclo de vida de las mariposas monarca dura aproximadamente un mes. Sin embargo, la generación que migra llega a vivir hasta 9 meses. A esta generación se le llama Matusalén, por su longevidad.

A diferencia de otras especies, las mariposas monarca no han estado antes en los sitios de hibernación.

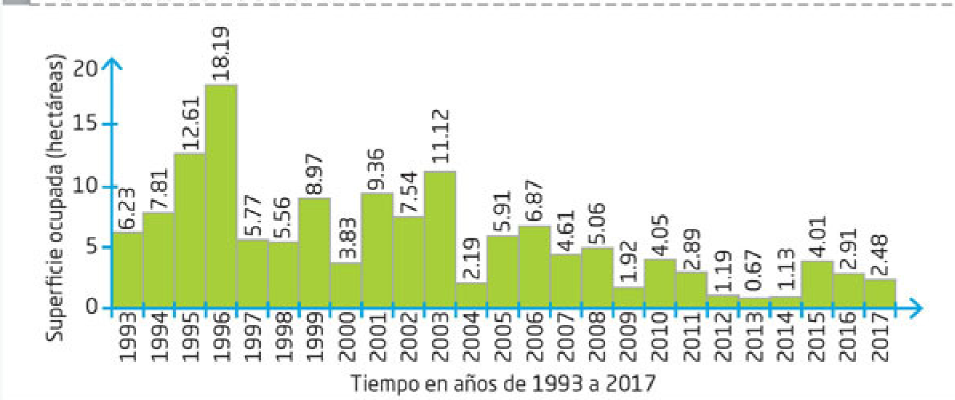
Glosario

hibernar. Adaptación que algunos animales presentan a condiciones invernales extremas, con descenso de la temperatura corporal y disminución general de las funciones metabólicas.

1. Analiza la gráfica con un compañero y respondan.

Diferentes organizaciones, interesadas en el cuidado del ambiente y las especies, han estudiado la migración de las mariposas monarca y han identificado algunos cambios en el tamaño de la población, tomando como criterio la superficie que ocupan en el periodo de hibernación, como se muestra en la siguiente gráfica.

Superficie de bosque ocupada por colonias de mariposas monarca en México de 1993 a 2017



Fuente: www.wwf.org.mx/?uNewsID=324152 (consulta: 11 de septiembre de 2018).

a. ¿En qué año se registró la mayor migración? ______________________

b. ¿Cuánta superficie ocuparon las mariposas en 2003? ______________________

¿Y en 2008? ______________________

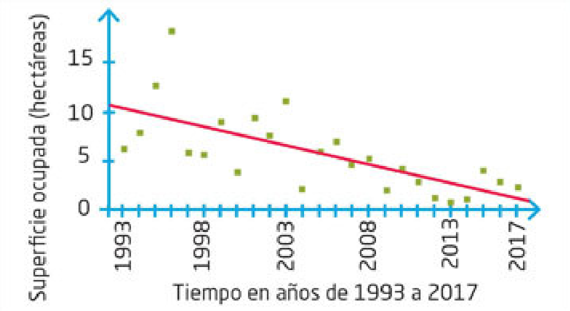
c. ¿Pueden anticipar si la población que hibernará en México en los próximos años será mayor o menor que la que hibernó en 2018? Argumenten. ____________

____

2. Analiza las gráficas y responde en tu cuaderno.

Para entender mejor el comportamiento de la población, los científicos suelen aproximar las gráficas mediante una función y tomar decisiones con base en ella.

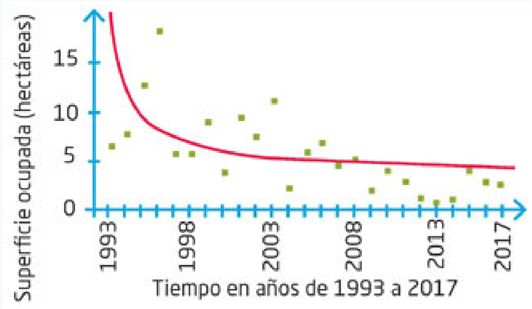
a. La doctora Lozano aproximó la gráfica anterior utilizando diez datos mediante una línea recta. Los datos se muestran como puntos verdes. La ecuación de la recta que encontró es $y = 10.62 - 0.38x$.



- De acuerdo con esta gráfica, ¿cuánto varía la superficie ocupada por la población cada año?
- ¿Qué superficie se espera que se ocupe en el año 2019?
- ¿Qué pronostica esta gráfica?

b. La doctora Sandoval, para interpretar el mismo fenómeno, usó la función $y = 3.82 + \frac{16.57}{x}$ con la que obtuvo la gráfica que se muestra a la derecha.

- De acuerdo con esta gráfica, ¿cómo varía la superficie ocupada por la población cada año?
- ¿Cuál es la superficie ocupada esperada para el año 2019?
- ¿Qué pronostica esta gráfica respecto del comportamiento de la migración?



Comenta tus respuestas con tus compañeros. Comparen ambas gráficas y analicen si difieren sus pronósticos. Concluyan cuál aproximación es mejor.

3. Forma equipo con tres compañeros y hagan lo que se solicita.

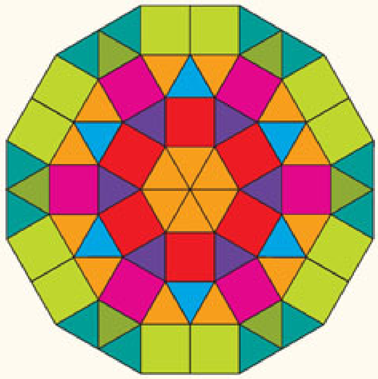
a. Investiguen qué factores influyen para que el tamaño de la población de mariposas monarca que hiberna en México esté disminuyendo.
b. Con base en su investigación, propongan medidas para preservar la especie.

Expongan al grupo los resultados de su investigación. Elaboren gráficas que apoyen sus conclusiones.

Reviso mi trayecto

Resuelve los problemas. Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Toma nota de los contenidos que tienes que repasar.

1. Observa el teselado y responde.

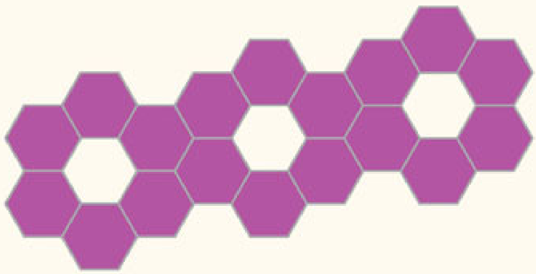


a. ¿Qué polígonos forman el teselado? ______

b. ¿Cuántos grados miden los ángulos interiores de cada polígono? ______

c. ¿Qué tipo de teselado es: regular, semirregular, demirregular o irregular? Justifica tu respuesta. ______

2. La imagen está formada por 3 arreglos de flores, cada uno compuesto por 6 hexágonos regulares. El perímetro de cada hexágono es de 1.23 cm.



a. ¿Cuánto mide el perímetro interior de los tres arreglos? ¿Y el exterior? ______

b. ¿Cuánto medirían los perímetros interior y exterior si el diseño tuviera 100 arreglos? ______

c. Escribe las expresiones algebraicas que representan los perímetros del diseño con *n* arreglos de flores. ______

3. En una bolsa hay 12 pelotas rojas, 7 verdes y 2 azules. Calcula la probabilidad teórica de que, al sacar una sin ver, sea de cada color.

Valoro mis fortalezas

Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Con base en tus resultados, retoma los contenidos que se te dificultaron.

1. Aplica las leyes de los exponentes para simplificar las expresiones. Considera que únicamente deben aparecer exponentes positivos.

a. $\left(\frac{x}{2y}\right)^6 =$ ____________________

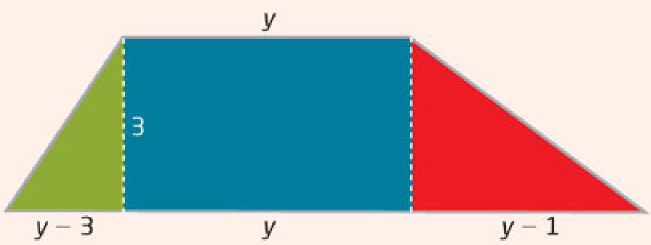
b. $(3z^{-2})^{-3} =$ ____________________

c. $(x^2)^{-4} \times (x^{-4})^2 =$ ____________________

d. $\left(\frac{a}{b^2}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right)^{-2} =$ ____________________

e. $((3b^2)^2)^{-3} =$ ____________________

2. Observa la figura y obtén lo que se solicita en términos de *y*.



- Área del triángulo verde. ____________________
- Área del triángulo rojo. ____________________
- Área del rectángulo. ____________________

a. Suma las tres expresiones que obtuviste para representar el área del trapecio.

____

b. Utiliza la fórmula para calcular el área del trapecio y obtén otra expresión.

____

c. Simplifica las expresiones de los incisos *a* y *b* para demostrar que son equivalentes.

3. Analiza el procedimiento que se siguió para resolver la ecuación. Donde corresponda, explica qué propiedad de la igualdad se utilizó en cada paso.

i. $3y + 6 = 5 + 6y$ ____________________

ii. $3y + 6 - 3y = 5 + 6y - 3y$ ____________________

iii. $6 = 5 + 3y$ ____________________

iv. $6 - 5 = 5 + 3y - 5$ ____________________

v. $1 = 3y$ ____________________

vi. $\frac{1}{3} = \frac{3y}{3}$ ____________________

vii. $\frac{1}{3} = y$ ____________________

viii. $y = \frac{1}{3}$ ____________________

4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones. Utiliza el método que se indica y anota tus procedimientos en los recuadros.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

a. Sustitución

b. Igualación

c. Suma y resta

5. **En cada caso explica si es posible formar un teselado con los polígonos regulares que se indican y por qué.**

a. Dos pentágonos y dos triángulos: ______________________________

____

b. Dos hexágonos y dos triángulos: ______________________________

____

c. Un hexágono y dos cuadrados: ______________________________

____

d. Un hexágono, dos cuadrados y un triángulo: ______________________________

____

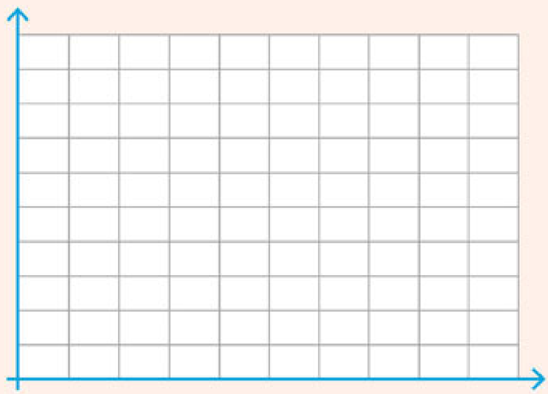
e. Un dodecágono, un cuadrado y dos triángulos: ______________________________

____

6. **La tabla de la izquierda muestra las ventas quincenales de varios locales. Con base en las ventas, elabora la tabla de frecuencias y el histograma correspondiente. Considera intervalos cuya amplitud sea de $5 000.**

Local	Venta ($)
1	6 750
2	12 500
3	2 300
4	17 500
5	18 020
6	28 910
7	34 000
8	22 100
9	43 230
10	35 000
11	5 550
12	11 100
13	48 900
14	1 000
15	7 900
16	8 000
17	46 350
18	49 000

Límite inferior	Límite superior	Marca de clase	Frecuencia absoluta



Trimestre 3

En este trimestre:

- Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.
- Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
- Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpretarás y resolverás problemas que se modelan con estos tipos de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Deducirás y usarás las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
- Calcularás el perímetro y el área de polígonos regulares, y del círculo a partir de diferentes datos.
- Calcularás el volumen de prismas y cilindros rectos.
- Resolverás problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
- Recolectarás, registrarás y leerás datos en histogramas y polígonos de frecuencia y gráficas de línea.
- Usarás e interpretarás las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decidirás cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

El mundo en papel

Desde la Antigüedad, las comunidades humanas han tenido la necesidad de representar gráficamente el mundo para determinar la ubicación geográfica de lugares, describir el entorno, y trazar rutas de comercio entre otros propósitos.

La manera de concebir el mundo y de interpretarlo gráficamente ha evolucionado a lo largo de la historia gracias a los avances científicos y tecnológicos. Sin embargo, representarlo con fidelidad en un plano ha sido todo un reto.

Algunos intentos han consistido en proyectar el planeta en distintos cuerpos y luego convertir esos cuerpos en planos. Por ejemplo, el mapamundi que usamos en la actualidad es el desarrollo plano de un **cilindro** en el que se proyectó la Tierra. El problema de esta representación es que altera el tamaño de los continentes.

El mapa más exacto que se ha hecho es el que desarrolló el arquitecto Hajime Narukawa usando un **tetraedro.**

¿Por qué consideras que es importante representar gráfica y métricamente la porción de un territorio con mayor exactitud?

Representación cartográfica "Map of the North Pole", elaborada por Guillaume Le Testu en 1555. En esta imagen se ubica al polo norte en el centro del plano dividido en cuatro cuadrantes. En forma de pétalos se representan la distribución de los continentes y la dirección de los vientos.

Secuencia didáctica

33

Aproximación de la raíz cuadrada

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.

Lección 1

¿Qué es la raíz cuadrada?

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee la situación y responde.

El dueño de un jardín cuadrado de 25 m^2 quiere cercarlo.

a. ¿Cuánto debe medir el largo de cada lado de la cerca? ______

b. ¿Cómo puedes verificar que tu respuesta es correcta? ______

______

c. Describe el procedimiento que usaste para determinar el largo de cada lado de la cerca y tu procedimiento para verificarlo. ______

______

______

- **Compara tu respuesta y tus procedimientos con los de tus compañeros.**

Potencias y raíces

TRAYECTO FORMATIVO

1. Reúnete con un compañero y completen la tabla. Luego grafiquen los datos en su cuaderno.

a						4	− 4					7	− 7
a^2	0	4	4	9	9			25	25	36	36		

a. Analicen el procedimiento con que completaron la tabla y describan.

- Cuando a era el valor conocido, ¿cómo determinaron a^2? ______

______

______

- Cuando el valor conocido era a^2, ¿cómo determinaron a? ______

______

______

- ¿Qué tipo de números son los de la columna a^2? ______
- ¿Cuántos resultados se obtienen al calcular la raíz cuadrada de un número?

______

- ¿Cómo son los números que resultan de aplicar una raíz cuadrada? ______

______

- **Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y comenten cómo pueden comprobar que son correctas.**

La **raíz cuadrada** de un número mayor o igual que cero es otro número que, al elevarlo al cuadrado, nos da el número original. Es decir, b es la raíz cuadrada de a si $b^2 = a$. En matemáticas se escribe $b = \sqrt{a}$ para representar la raíz positiva y $b = -\sqrt{a}$ para la negativa o $b = \pm\sqrt{a}$ para representar ambas raíces.
Por ejemplo, $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{16} = -4$ o $\sqrt{16} = \pm 4$.

2. **Con base en lo anterior, completen la tabla y grafiquen en su cuaderno.**

a	1	4	9	16		36	49	64	81
$\sqrt{a}$					5				
$-\sqrt{a}$									

a. Analicen el procedimiento mediante el que completaron la tabla y describan en su cuaderno cómo determinaron $\sqrt{a}$.

- **Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y verifíquenlas. Si es necesario, corrijan.**

3. **Completen las siguientes tablas. Luego analícenlas y respondan las preguntas en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.**

a	1	-1	2	-2	5	-5	10	-19
a^2								

a	1		4		25		100	
$\pm\sqrt{a}$								

a. ¿Cuántos resultados se obtienen al calcular la raíz cuadrada de un número? ¿En qué se diferencian los resultados?
b. ¿Pueden obtener la raíz cuadrada de un número negativo? ¿Por qué?

- **Comenten sus respuestas con sus compañeros.**

Practicar para avanzar

1. Calcula las raíces cuadradas.

$\sqrt{121} =$ ____________ $\sqrt{16} =$ ____________ $\sqrt{400} =$ ____________ $\sqrt{10000} =$ ____________

$\sqrt{121} = -$ ____________ $\sqrt{16} = -$ ____________ $\sqrt{400} = -$ ____________ $\sqrt{10000} = -$ ____________

$\sqrt{\dfrac{36}{100}} = \pm$ $\sqrt{\dfrac{81}{49}} = \pm$ $\sqrt{\dfrac{9}{100}} = \pm$ $\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \pm$

Compara tus resultados con los de tus compañeros y analicen cuándo la raíz cuadrada es más grande y cuándo es más pequeña que el número original.

Aproximaciones de la raíz cuadrada

1. **Lee la situación y responde.**

   a. Tres letreros anuncian la venta de sendos terrenos cuadrados.

- ¿De cuántos metros cuadrados es el terreno del primer anuncio? ____________
- ¿Cuánto miden los lados de los otros dos terrenos? ____________
- ¿La medida de los lados de los otros dos terrenos puede ser un número negativo? ¿Por qué? ____________

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten sus procedimientos y las dificultades que tuvieron para responder.**

2. **Reúnete con un compañero, completen la tabla y grafiquen los datos en su cuaderno.**

a	11	12	13	14	15	16
a^2						

Glosario

raíz cuadrada exacta. Se dice que una raíz cuadrada es exacta si su valor es un número entero.

   a. Analicen la tabla y la gráfica y respondan.

- ¿Por qué $\sqrt{200}$ no es una **raíz cuadrada exacta**? ____________
- Según la tabla, ¿entre qué valores debe encontrarse $\sqrt{200}$? ____________
- A partir de la gráfica ¿qué valor aproximado darían a $\sqrt{200}$? ____________

- **Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y analicen cómo respondieron la última pregunta.**

3. **Retomen las actividades anteriores y argumenten.**

   a. Los siguientes números están ordenados de menor a mayor: $196 < 200 < 225$. Si se aplica a cada número la raíz cuadrada $\sqrt{196} < \sqrt{200} < \sqrt{225}$ y se extrae la raíz cuadrada a los cuadrados perfectos, se observa que $14 < \sqrt{200} < 15$. Entonces:

- ¿El valor de $\sqrt{200}$ está más cerca de 14 o de 15? ____________
- Subrayen la aproximación que les parece más acertada.

$14.1 < \sqrt{200} < 15.1$ $\quad$ $14.2 < \sqrt{200} < 14.5$ $\quad$ $14.1 < \sqrt{200} < 14.2$

4. **Observen el ejemplo y completen la tabla para aproximar la raíz cuadrada de 200.**

Aproximación	$a < \sqrt{200} < b$	$a^2 < 200 < b^2$	$200 - b^2$	$b^2 - 200$
1	$14 < \sqrt{200} < 15$	$196 < 200 < 225$	4	25
2	$14.1 < \sqrt{200} < 14.2$	$198.8 < 200 < 201.6$		
3				

a. De la última fila de la segunda columna, ¿cuál de los dos valores usarían para aproximar la raíz cuadrada de 200: el de la derecha o el de la izquierda?

____

- **Comenten con sus compañeros la experiencia de esta actividad y escriban los pasos de un método para aproximar la raíz cuadrada. Retomen la actividad 3 y verifiquen que eligieron la mejor aproximación.**

Aplica lo que aprendiste.

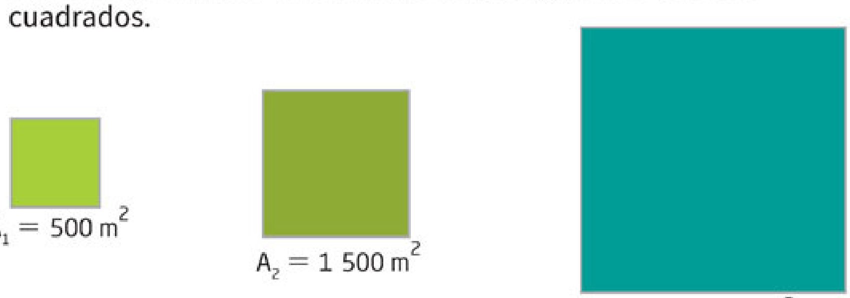
1. **Resuelve las actividades.**

PUNTO DE LLEGADA

a. Aproxima las siguientes raíces cuadradas.

$\sqrt{120} =$ __________ $\sqrt{670} =$ __________ $\sqrt{4.2} =$ __________

b. Calcula el perímetro de cada uno de los siguientes terrenos cuadrados.



$A_1 = 500\ \text{m}^2$ $A_2 = 1\ 500\ \text{m}^2$ $A_3 = 5\ 000\ \text{m}^2$

Perímetro __________ Perímetro __________ Perímetro __________

Glosario

energía cinética. Es la energía que posee un cuerpo debido a su movimiento.

c. La **energía cinética** de un cuerpo se define como $K = \frac{1}{2}mv^2$, y se mide en joules. La masa, m, se expresa en kilogramos y la velocidad, v, en m/s.

- Calcula la velocidad $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, si se lanza una bola de beisbol de 0.145 kg y la energía cinética de la bola en movimiento es de 45 joules, ¿a qué velocidad se está moviendo la bola? __________
- ¿La velocidad resultante puede ser negativa? ¿Qué significa que la velocidad sea negativa? ¿Y que sea positiva? __________

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten qué dificultades tuvieron.**

Reparto proporcional

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Lección 1 Reparto de cantidades

PUNTO DE PARTIDA

1. Lee la situación y responde.

Marco, Lalo y Rosa se reúnen para comprar un billete de lotería de \$500. Marco puso \$100, Lalo \$200 y Rosa \$150. Entre los tres deben decidir cuánto le tocará a cada uno si ganan el premio mayor de \$2 500 000.

Marco dice que el premio se debe dividir en tres partes iguales. Rosa afirma que eso no es justo y que se debe dividir de acuerdo con la cantidad que cada quien aportó para comprar el billete.

a. ¿Qué opinas de lo que proponen Marco y Rosa? ______________________

____

b. ¿Quién de los dos tiene razón? ______________________

¿Por qué? ______________________

____

c. Lalo dice que debe recibir el doble de lo que recibirá Marco. ¿Tiene razón? _____

¿Por qué? ______________________

____

d. Lalo dice que debe recibir 1.5 veces lo que recibirá Rosa. ¿Tiene razón? _____

¿Por qué? ______________________

____

e. Rosa dice que debe recibir 1.5 veces lo que recibirá Marco. ¿Tiene razón? _____

¿Por qué? ______________________

____

f. ¿Cómo puedes calcular lo que debe recibir cada uno si el premio mayor se reparte de manera proporcional a lo que aportaron? ______________________

____

____

g. Si el billete obtuviera el cuarto premio y a Rosa le correspondieran \$10 000, ¿cuánto le tocaría a Marco? ¿Y a Lalo? ¿Cómo lo sabes? ______________________

____

____

____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros y con tu profesor.**

Reparto proporcional

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Resuelve el problema con un compañero.**

Maricruz, Ana y Tomás pondrán un puesto de galletas en su colonia. Para comprar los ingredientes y los materiales para armar el puesto, Maricruz aportó \$150, Ana \$600 y Tomás \$450.

a. Si todos trabajan por igual, ¿cómo deben repartirse la ganancia de \$2 800 al final del día si se quiere que sea proporcional a lo que aportaron? ____________________

____

____

b. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?

Maricruz ____________ Ana ____________ Tomás ____________

- Justifiquen su respuesta. ____________________

____

c. ¿Son proporcionales las cantidades aportadas al principio y las recibidas como ganancia? ____________________

- ¿Cómo lo saben? ____________________

____

____

Cuando una cantidad se reparte de manera proporcional a otras cantidades se dice que se está llevando a cabo un reparto proporcional.

d. Utilicen las propiedades de la proporcionalidad para encontrar lo que le corresponde a cada uno, dadas distintas ganancias:

Ganancia	Tomás	Maricruz	Ana
\$5 000			
\$5 600			
\$10 000			
\$11 200			
\$15 000			
\$17 400			
\$20 000			

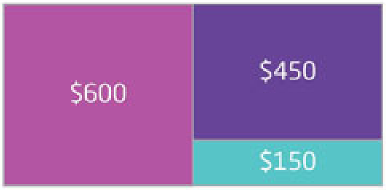
- **Comparen sus respuestas y procedimientos con sus compañeros. ¿Les sirvió tener las cantidades correspondientes a una ganancia de \$5 000 para obtener las correspondientes a \$10 000?**

Lección 2

Diferentes procedimientos

1. **Retoma el problema anterior y analiza los procedimientos que se utilizaron en el salón de Cristina para resolverlo.**

Procedimiento 1. Observé que Ana aportó la mitad del total invertido. La ganancia del día la dividí entre dos para saber lo que ella había dado. Luego me di cuenta de que, de la mitad restante, Maricruz dio una cuarta parte y Tomás dio tres cuartas partes. Hice un dibujo así:



Para encontrar la ganancia de cada uno, dividí la ganancia total a la mitad y luego dividí una mitad en cuatro partes iguales:

$$\frac{2800}{2} = 1400 \qquad \frac{1400}{4} = 350$$

Procedimiento 2. Utilicé proporcionalidad. La contribución de cada uno se debe relacionar con el total invertido ($1 200) de la misma manera que la ganancia de cada uno se relaciona con la ganancia total. Por ejemplo, en el caso de Maricruz:

	Maricruz	Total
Contribución	$150	$1 200
Ganancia		$2 800

Utilizando la regla de tres, obtuve una ganancia de $350 para Maricruz:

$$\frac{150 \times 2800}{1200} = 350$$

Procedimiento 3. Usé fracciones. De lo invertido, $\frac{1}{2}$ le corresponde a Ana, por lo que la ganancia la multipliqué por $\frac{1}{2}$. De lo restante, multipliqué por $\frac{1}{4}$ para encontrar lo que le corresponde a Maricruz y por $\frac{3}{4}$ para encontrar lo que le corresponde a Tomás.

$$2800 \times \frac{1}{2} = 1400 \qquad 1400 \times \frac{1}{4} = 350 \qquad 1400 \times \frac{3}{4} = 1050$$

a. Elige el procedimiento que prefieras y explícaselo a un compañero. Después busca a algún compañero que te describa un procedimiento diferente.
b. Calcula en tu cuaderno la ganancia que le correspondería a cada uno si al final del día se obtuvieran $3 700. Utiliza los tres procedimientos .

- **Comenten en grupo si obtuvieron los mismos resultados, qué procedimiento les parece mejor y por qué.**

Practicar para avanzar

Utiliza lo que sabes acerca del reparto proporcional para resolver los problemas. Haz los cálculos en tu cuaderno.

1. En un edificio de oficinas se reparte café molido. El repartidor calcula la cantidad de café por repartir de acuerdo con el número de empleados de cada departamento. En el departamento de ventas hay 20 empleados, en el de contabilidad hay 10, en el de planeación hay 5 y en el de compras hay 15.

- ¿Cuántos kilogramos de café se deben repartir por departamento si se tienen 150?
- ¿Y si se tuviera el doble de kilogramos de café?
- ¿Qué sucedería con los kilogramos de café por departamento si el número de empleados en cada departamento aumentara al doble?

a. Completa las tablas con las respuestas.

	Ventas	Contabilidad	Planeación	Compras	Total
Empleados	20	10	5	15	
Kilogramos de café					150

	Ventas	Contabilidad	Planeación	Compras	Total
Empleados	20	10	5	15	
Kilogramos de café					300

	Ventas	Contabilidad	Planeación	Compras	Total
Empleados	40	20	10	30	
Kilogramos de café					150

	Ventas	Contabilidad	Planeación	Compras	Total
Empleados	40	20	10	30	
Kilogramos de café					300

b. ¿Qué observas en las tablas? ____________________

____

____

____

Comenta con tus compañeros y con tu profesor lo que aprendiste sobre los distintos procedimientos para repartir una cantidad de manera proporcional.

Lección 3

Razones y reparto proporcional

1. **Un señor quiere repartir su herencia entre sus tres hijos a razón de 3:2:1. Si les va a heredar $250 000, ¿cuánto le tocará a cada uno?**

   a. Según lo que sabes acerca de las razones, ¿qué quiere decir una razón 3:2:1?

   ____

   b. ¿De qué manera se relaciona la cantidad mayor con la menor? ______________

   ____

   c. ¿Y la menor con la de en medio? ______________

   d. Si la cantidad menor se denota con *x*, escribe una expresión para lo que debe recibir cada hijo.

Hijo 1	Hijo 2	Hijo 3

   e. Escribe una ecuación que relacione lo que recibe cada hijo con el total por heredar. ______________

   f. Resuelve la ecuación en el recuadro, para calcular lo que recibirá cada hijo.

   g. Comprueba tus respuestas. ¿Se relacionan las cantidades de acuerdo con las razones indicadas? ______________

   h. ¿De qué otras maneras se puede resolver ese problema? Encuentra al menos otro procedimiento. ______________

   ____

   ____

   i. Finalmente, el señor cambia de opinión y decide dar $50 000 a uno de sus hijos y $100 000 a los otros dos. ¿Cómo se representa este reparto mediante una razón?

   ____

   j. ¿Cuánto le tocaría a cada hijo si repartiera las cantidades a razón 4:2:1? ______________

   ____

- **Comenta con tus compañeros cómo resolver un problema de reparto proporcional en el que el reparto está definido por una razón y validen los procedimientos con su profesor.**

Porcentaje y reparto proporcional

2. **Tres colegas realizaron un proyecto por el que cobrarán $25 000. Uno de ellos efectuó 40% del trabajo, otro 35% y el otro 25%.**

   a. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno? ______

   b. ¿A qué razón corresponde este reparto? ______

   c. Escribe una expresión algebraica que represente este reparto. ______

3. **Una cantidad se reparte a razón 2:4:8.**

   a. ¿A qué porcentajes del total corresponde este reparto? ______

   b. Si la cantidad por repartir fuera $1 850, ¿de qué manera tendría que repartirse?

   ______

   - **Comenta con tu profesor cómo se relaciona el porcentaje con el reparto proporcional.**

Herramientas académicas

Entra a la página www.esant.mx/fasema2-006 y resuelve los problemas que se plantean para reforzar lo que aprendiste en esta secuencia.

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Resuelve los problemas en tu cuaderno.**

   a. Un abuelo decide repartir $8 000 entre sus tres nietos de manera proporcional a sus edades. Si los nietos tienen 4, 10 y 18 años, respectivamente:

      - ¿Cómo puede expresarse este reparto mediante una razón?
      - ¿Y mediante una expresión algebraica?
      - ¿Cuánto le tocará a cada uno?

   b. Se debe repartir una ganancia de 28.5 en tres partes que deben ser proporcionales a los números $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$. ¿De qué manera se debe repartir la cantidad?

   c. La expresión $10000 = y + 3y + 9y$ indica un reparto proporcional. ¿Cómo puede expresarse este reparto mediante una razón?

      - En un párrafo, describe el reparto. ¿Cuánto le tocará a cada uno?
      - Inventa un problema que corresponda a dicho reparto y expresa el reparto utilizando porcentajes y razones.

   - **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Luego escribe en tu cuaderno lo que aprendiste sobre el reparto proporcional.**

Secuencia didáctica

35

Resolución de sistemas de ecuaciones

Aprendizaje esperado: : Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Lección 1

¿Cuál método conviene usar?

PUNTO DE PARTIDA

1. Formen equipos de cinco compañeros, lean la situación y contesten.

Lorena debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones y no sabe qué método utilizar para hacerlo.

$$\begin{cases} 2t - 3z = -12 \\ 7z + 4t = 2 \end{cases}$$

Federico le sugirió usar el método de sustitución, Teresa le aconsejó usar el método de suma y resta, y Marco, que lo resuelva gráficamente. ¿A quién debe hacer caso Lorena?

a. Analicen las ecuaciones, discutan y justifiquen su respuesta.

- ¿Conviene el método que propone Federico? ____________________
- ¿Y el que propone Teresa? ____________________
- ¿Y el que propone Marco? ____________________

b. ¿Cuál método le sugieren a Lorena que utilice? ¿Por qué? ____________________

____

c. ¿Existe un método específico que sea el más adecuado para resolver el sistema de ecuaciones? ¿Por qué? ____________________

____

- **Comenten sus respuestas con otros equipos y con el profesor.**

Comparación de métodos de solución

TRAYECTO FORMATIVO

1. Retomen la situación de la actividad anterior y hagan lo que se indica.

a. Dividan al grupo en dos equipos y resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones. Un equipo usará el método que sugiere Federico y el otro, el propuesto por Teresa. Al terminar, verifiquen su solución.

- ¿Qué solución se obtiene con el método propuesto por Federico? ____________________
- ¿Y con el método sugerido por Teresa? ____________________
- ¿Esperaban esta situación? ¿Por qué? ____________________

____

b. Comenten si conviene usar el método recomendado por Marco y anoten sus conclusiones. ____________________

____

c. Comparen los métodos que utilizaron.

- ¿Cuál les parece el más adecuado? ¿Por qué? ______
- ¿Hay otro método más eficiente para resolver el sistema? ¿Cuál es? Justifiquen su respuesta. ______
- ¿Qué solución encontrarían aplicando el método anterior? ¿Por qué? ______

d. Después de lo que hicieron, ¿consideran que el método que sugirieron al principio de la lección es el mejor? ¿Por qué? ______

- **Comenten en grupo sus respuestas y analicen la siguiente información.**

El **conjunto solución** que se obtiene al resolver un sistema de ecuaciones lineales es siempre el mismo, independientemente del método que se use. Esto ocurre porque todos los métodos se basan en la aplicación de las **propiedades de la igualdad.**

2. Resuelve en tu cuaderno.

a. Utiliza los métodos de sustitución, igualación y reducción para resolver cada sistema de ecuaciones. Escribe el conjunto solución en cada caso.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} 14p + 3q = 16 \\ 7p - 5q = 34 \end{cases} \qquad \begin{cases} 24w - 8z = 8 \\ -3w + z = -1 \end{cases}$$

- Decide cuál método es más eficiente en cada caso y escribe qué características de cada sistema te ayudan a decidir cuál usar.

b. Traza la gráfica correspondiente a cada sistema de ecuaciones. ¿En cuál o cuáles casos resulta más eficiente hacer la gráfica para resolverlo? ¿Por qué?

3. Representa el siguiente problema con un sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo en tu cuaderno. Justifica tu elección del método para hacerlo.

Tomás quiere entrenar tres días en una pista según las recomendaciones del entrenador. Para ello, planeó lo siguiente.

- **Día 1:** Caminar y trotar el tiempo recomendado. Recorrer 12 km. Su velocidad promedio al caminar debe ser de 5 km/h y al correr, de 9 km/h.
- **Día 2:** Entrenar los lapsos de tiempo recomendados. Primero con patines y luego, patineta. Recorrer 46 km y la velocidad promedio en patines debe ser de 15 km/h y en patineta, de 27 km/h.
- **Día 3:** Entrenar durante los mismos lapsos de tiempo, primero patines en línea y después, en bicicleta de carrera. Recorrer 56 km. La velocidad promedio en patines debe ser de 22.5 km/h y en bicicleta, de 40.5 km/h.

a. ¿Cuáles serán los dos tiempos de entrenamiento? Interpreta tu respuesta.

- **Observen si obtuvieron las mismas soluciones y revisen sus procedimientos.**

Lección 2

¿Cuál método de solución es mejor?

1. Lee con un compañero, sigan las instrucciones y respondan.

Una tarde, Santiago salió corriendo de su casa y dejó la puerta abierta. Su perra Laska salió corriendo 6 min más tarde detrás de él. Santiago corre a una velocidad de 0.2 km/min y Laska, a una velocidad de 0.5 km/min. Si ambos corren a velocidad constante, ¿alcanzará Laska a Santiago? Si es así, ¿qué tan lejos de su casa lo alcanzará?

a. Usen la velocidad a la que corre Santiago para escribir una ecuación que represente la distancia que recorrió a velocidad constante. ______

b. ¿Cuánto habrá corrido Santiago después de 6 minutos? ______

c. Representen con una ecuación la distancia que ha recorrido Laska. Recuerden que salió 6 min después de Santiago. ______

d. Escriban el sistema de ecuaciones que encontraron. ______

______

- ¿Cuál es el método más eficiente para resolver este sistema de ecuaciones? ¿Por qué? ______

______

e. Resuelvan el sistema usando el método que consideraron. ______

- Interpreten la solución en términos del problema. ______

______

- Verifiquen que la solución que encontraron sea la correcta.

- **Comenten en grupo y con su profesor cuál método eligieron y por qué. ¿Coincidieron en su elección?**

Algunas características de las ecuaciones

2. Reúnete con dos compañeros, analicen el sistema de ecuaciones y contesten.

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = x - 6 \end{cases}$$

a. ¿En qué se parece este sistema al que resolvieron en la actividad anterior?

______

b. Completen las afirmaciones.

En el sistema aparece la variable y como variable aislada en ambas ecuaciones. Conviene usar el método de ______ para obtener un sistema de ecuaciones con una sola ecuación en la que aparece únicamente ______.

c. Simplifiquen el sistema. ______

- ¿Cuál es el sistema equivalente? ______
- ¿Cuál es la solución del sistema? ______

3. **Analicen en parejas el siguiente sistema y contesten.**

$$\begin{cases} 5s - u = 3 \\ -2s + 4u = -12 \end{cases}$$

a. ¿El sistema tiene alguna variable aislada? ¿Cuál y en cuál ecuación? ______

- Reescriban esa ecuación en términos de la variable aislada. ______

b. Sustituyan el valor de la variable aislada en la otra ecuación y simplifíquenla. ¿Qué observan? ______

c. Resuelvan la ecuación que obtuvieron. ______

d. Repitan el procedimiento de sustitución para este sistema utilizando la otra variable y resuelvan la ecuación. ______

e. ¿Cuál es la solución del sistema? ______

f. ¿Pueden sustituir los valores que encontraron en cualquier ecuación? ¿Por qué? ______

- **Comenten en grupo si pueden resolver el sistema por otro método, cuál sería y si simplifica o complica la resolución.**

Al resolver sistemas de ecuaciones:

- Conviene usar el **método de sustitución** cuando el sistema tiene una variable aislada o si hay, al menos, una variable con coeficiente 1. Pero, cuando el sistema es consistente y tiene un número infinito de soluciones, en el procedimiento pueden aparecer enunciados que son siempre verdaderos como $3 = 3$ o $0 = 0$, que te pueden confundir.

- Conviene usar el **método de igualación** o el **método gráfico** si se tiene la misma variable aislada o si es fácil aislarla en todas las ecuaciones. En el caso del método gráfico, conviene cuando los coeficientes de las ecuaciones no tienen decimales ni fracciones, pero tiene varias desventajas: no siempre puedes saber exactamente dónde se intersecan las rectas que representan a las ecuaciones o, dependiendo de la escala y los coeficientes de las variables, es difícil representar las ecuaciones con exactitud. Por otra parte, el método de igualación sirve en problemas en los que se tienen más de dos incógnitas, mientras que el gráfico no es útil en estos casos.

- Conviene usar el **método de reducción**, o **suma y resta** cuando el coeficiente de una de las variables es múltiplo del coeficiente de la misma variable en otra ecuación. Si se usa con orden, este método puede ser más seguro que los otros. Su mayor desventaja radica en que en el procedimiento pueden aparecer fracciones o decimales que pueden hacerlo más tardado y complejo.

Lección 3 Decide cuál método de solución conviene utilizar

1. **Analiza la situación y contesta.**

Lourdes y Carmen van a decorar un salón de fiestas con globos metálicos y de hule. Por cada 2 globos de hule, colocarán 3 globos metálicos y necesitarán en total 300 globos. Cada globo de hule cuesta \$3.60 y cada globo metálico, \$5.40. Si su presupuesto es de \$540, ¿cuántos globos de cada tipo deben comprar?

a. Escribe un sistema de ecuaciones que represente esta situación. Utiliza las variables x e y. ____________________

____

- ¿Qué representa la variable x? ____________________
- ¿Qué representa la variable y? ____________________

Uso del método y solución

2. **Reúnete con dos compañeros, retomen la situación del problema anterior y hagan lo que se pide.**

a. Analicen el sistema de ecuaciones y lean de nuevo los criterios mencionados en la lección 2 para resolver sistemas de ecuaciones.

- ¿Cuál método de solución conviene utilizar? ¿Por qué? ____________________

____

b. Utilicen el método que eligieron para resolver el sistema.

c. ¿Cuál es el conjunto solución? ____________________

- ¿Qué observan? ____________________

d. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ____________________

- ¿Qué tipo de números se deben usar para que la solución tenga sentido? ____________________

____

e. ¿Cómo pueden Lourdes y Carmen tomar la decisión de cuántos globos comprar?

____

- ¿Podrían tomar una decisión diferente? ¿Por qué? ____________________

____

- **Comparen su solución con la de equipos que hayan usado métodos diferentes y discutan con el profesor qué se puede concluir.**

3. **Retomen en parejas el problema de los globos y hagan lo que se pide.**

a. Encuentren el valor de una de las variables del sistema. ______________

b. Sustituyan el valor obtenido en la primera ecuación. ______________

c. Resuelvan la ecuación resultante y encuentren el valor de la otra incógnita.

d. ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones? ______________ Verifíquenla.

e. ¿Qué significa la solución en términos del problema? ______________

- **Comparen sus resultados con dos equipos y pregunten sus dudas a su profesor. Después analicen la siguiente información.**

> Sin importar el método de solución que se elija para resolver un sistema de ecuaciones, el **conjunto solución** que se obtiene es siempre el mismo. Si el sistema es **inconsistente**, no tendrá solución independientemente del método que se use para resolverlo. Si es **consistente**, se encontrará la misma solución independientemente del método utilizado para resolverlo. Esto ocurre ya que en cada paso del proceso de resolución se pasa a un sistema **equivalente**, con el **mismo número de ecuaciones** y la **misma solución**. Aunque a veces se tome una parte del sistema que se ha simplificado para encontrar los valores de algunas variables, no hay que olvidar que la ecuación que no se considera tambien es parte del sistema.

4. **Usa los tres métodos estudiados y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en tu cuaderno. No olvides verificar la solución.**

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ x = 5 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x - y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$$

- **Validen sus resultados en grupo y comenten sus conclusiones.**

Aplica lo aprendido y responde en el cuaderno.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Elige un método y resuelve los siguientes sistemas.**

$$\begin{cases} -6x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}s + 3t = 6 \\ \frac{1}{3}s + 5t = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 7 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$$

a. ¿Cuántas soluciones tiene cada sistema?

2. **Responde.**

¿Has encontrado alguna característica de los sistemas consistentes que tienen múltiples soluciones? Explica.

- **Compartan sus respuestas y comenten sus dudas sobre la resolución de sistemas de ecuaciones.**

Problemas y sistemas de ecuaciones

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Lección 1

Un problema económico

PUNTO DE PARTIDA

1. **Formen equipos de tres integrantes, lean la situación y resuelvan.**

En Guanajuato se venden fresas durante el verano. En un análisis económico se encontró que el precio de venta de este producto depende linealmente de la cantidad que se compra. El precio base es de $7.00 y por cada mil kilogramos de fresa que se demanda, el precio disminuye $0.40. También se encontró que el precio que fijan los productores que abastecen el mercado aumenta $0.08 por cada mil kilogramos y su precio base es de $0.82. El precio de demanda es el precio máximo que pagaría un consumidor y el de oferta es lo mínimo que cobraría el productor cuando no hay demanda. Los economistas consideran que el mercado está en equilibrio cuando el precio de demanda y el precio de oferta son iguales. ¿Cuál es el precio de equilibrio en este caso?

a. Analicen la situación anterior. ¿Cuántas ecuaciones se requieren para resolver este problema? Justifiquen su respuesta. ______

______

b. Si p es el precio del kilogramo de fresa y q es la cantidad en miles de kilogramos, ¿la ecuación $p = 0.82 + 0.08q$ representa el precio de oferta? ______

c. ¿Qué ecuación representa el precio de demanda? ______

d. Expliquen, en términos del sistema de ecuaciones formado, qué significa que el mercado esté en equilibrio. ______

______

e. Discutan cuál método de solución conviene utilizar para resolver el sistema.

- **Validen sus respuestas con otros equipos y resuelvan sus dudas.**

Análisis y resolución del problema

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Retomen con su equipo la situación anterior y contesten. Arguméntenlas.**

a. ¿Cómo se comporta el precio conforme aumenta la cantidad de fresas que se ofrece? ______

- ¿Les parece lógico este comportamiento? ______

b. ¿Cuántos kilogramos de fresa están dispuestos a vender quienes abastecen el mercado si el precio del kilogramo es de $1.40? ______

c. ¿Cómo se comporta el precio de oferta conforme aumenta la cantidad de fresas que se ofrece? ______

- ¿Les parece lógico este comportamiento? ______

______

d. ¿Cuántos kilogramos de fresa comprarán los consumidores si el precio del kilogramo es de $1.40? ______

e. Con el método que seleccionaron, resuelvan el sistema de ecuaciones en su cuaderno. ¿Qué solución encontraron? ______

f. Comprueben que su solución es correcta.

g. ¿Qué significa la solución en términos del problema? ______

______

- **Comparen con otros equipos sus respuestas. Analicen si hubo diferencias entre sus respuestas y por qué ocurrió esto.**

Los **sistemas de ecuaciones lineales** se pueden utilizar en gran variedad de situaciones. Es importante comprender y analizar cada situación para escribir simbólicamente las ecuaciones que la representan. El análisis de las ecuaciones permite seleccionar el método de solución adecuado.

2. **Haz lo que se pide para ambos problemas.**

Problema 1: La ecuación para determinar el precio de demanda en pesos de las peras en el estado de Sonora es $p = -0.4q + 6$, con q en miles de kilogramos. El precio de oferta está dado por $p = 0.07q + 1.35$. Encuentra el precio de equilibrio de las peras en esta situación.

Problema 2: En la frutería de don Juan hay una caja con 98 frutas entre naranjas y toronjas; el número de naranjas excede al de toronjas en 24. ¿Cuántas naranjas y cuántas toronjas hay en la caja?

a. Analiza cada problema y escribe las ecuaciones que describen las situaciones planteadas. ______

______

b. Analiza las ecuaciones para determinar si representan lo que se espera.

c. Resuelve los problemas en tu cuaderno. Escribe todo tu procedimiento y verifícalo una vez que termines.

d. Determina si la solución es lógica en términos del problema. Escribe tus conclusiones utilizando argumentos matemáticos. ______

______

______

______

______

______

- **Compara tu planteamiento y solución para cada problema con los de tres compañeros. Corrijan sus errores y resuelvan sus dudas con ayuda del profesor.**

Lección 2

Representación de un problema y uso de tablas

1. **Reúnete con un compañero. Lean la situación y hagan lo que se pide.**

Glosario

microgramo (μg). Es una unidad de medida de masa y corresponde a la millonésima parte de 1 g, es decir, $1\ \mu g = 1 \times 10^{-6}$ g $= 0.001$ mg.

El médico le recomendó a Mariana incluir en su dieta diaria leche y jugo de naranja, pues necesita aumentar el calcio y la vitamina A. Le dijo que diariamente tenía que completar 550 miligramos de calcio y 1 200 **microgramos** de vitamina A. Mariana encontró que 1 taza de leche contiene 304 mg de calcio y 448 μg de vitamina A, y que una taza de jugo de naranja contiene 40 mg de calcio y 480 μg de vitamina A. Mariana debe calcular cuántas tazas de leche y cuántas de jugo de naranja debe consumir mínimamente al día para asegurarse de consumir completa la dosis de los dos nutrientes sugeridos por el médico.

a. ¿Cuántas ecuaciones se necesitan para resolver este problema? Justifiquen su respuesta. ____________________

b. ¿Cuáles serán las incógnitas de las ecuaciones? ____________________

c. Organicen la información del problema anterior en la tabla.

	Taza de leche	Taza de jugo de naranja	Total necesario
Calcio en mg			
Vitamina A en μg			

- ¿Qué información del problema hay en las columnas de la tabla? ____________________
- ¿Qué información se presenta en los renglones? ____________________

d. Utilicen la información de la tabla para formar ecuaciones en las que x represente la cantidad de tazas de leche que Mariana debe consumir y y, la cantidad de tazas de jugo de naranja. Escríbanlas como enunciados.

La ecuación para el consumo de calcio es: ____________________

La ecuación para el consumo de vitamina A es: ____________________

- ¿En qué unidad se mide la cantidad representada en la primera ecuación? ____________________
- ¿En qué unidad se mide la cantidad representada en la segunda ecuación? ____________________

e. Escriban y analicen el sistema de ecuaciones que resuelve el problema. ____________

____

f. ¿Qué método consideran que es mejor para resolver el sistema que plantearon? ¿Por qué? ____

____

g. Resuelvan el sistema de ecuaciones lineales en su cuaderno y escriban la solución a continuación. ____

- Comprueben su solución en su cuaderno.

h. Expliquen qué representa cada cantidad que obtuvieron. ____________________

____

i. ¿Qué le dirán a Mariana acerca de la cantidad mínima de tazas de leche que debe consumir si aproximan la solución para que sea más fácil calcularlas? ____________

____

____

- **Discutan su procedimiento y su solución con su profesor y el resto del grupo. Observen si todos obtuvieron el mismo resultado y por qué.**

Las **tablas** se pueden utilizar para organizar la información de un problema que se quiere plantear con un sistema de ecuaciones lineales. Conviene hacer esta organización de tal forma que las cantidades representadas por la **misma variable** estén en la **misma columna**. También ayuda escribir las ecuaciones como enunciados para que sea más fácil interpretarlas cuando se analiza si representan correctamente la situación del problema.

Practicar para avanzar

Resuelve el siguiente problema. Utiliza la estrategia sugerida en la lección. Escribe todas tus operaciones en el recuadro.

Dos especies de bacterias coexisten en un tubo de ensayo con dos nutrientes. La bacteria de tipo 1 consume 3 unidades del alimento 1 y la bacteria de tipo 2 consume 5 unidades del alimento 1, mientras que la bacteria de tipo 1 consume 4 unidades del alimento 2 y la bacteria de tipo 2 consume 2 unidades del alimento 2.

¿Qué población de bacterias puede sostenerse en el tubo si se suministran 15 000 y 30 000 unidades respectivamente de cada alimento? ____

Lección 3

Otro problema con ecuaciones

1. **Reúnete con dos compañeros y respondan.**

Julio quiere invertir \$12 000. Invertirá una parte en una cuenta que da 8% de interés simple anual y el resto en una cuenta que da 15% de interés simple anual. Julio necesita calcular cuánto debe invertir en cada cuenta para obtener 12% anual sobre el total de la cantidad invertida.

a. Revisen con cuidado el problema. ¿Les recuerda alguno que hayan resuelto en secuencias anteriores? ¿Por qué? ______________________

____

b. ¿Qué representa la variable x? ¿Y la variable y? ______________________

____

c. Analicen de nuevo el problema y llenen la tabla con la información que requieren para resolverlo.

d. Escriban como enunciados las ecuaciones que representan este problema. ______

____

____

____

e. Escriban simbólicamente el sistema de ecuaciones que representa este problema.

____

____

f. ¿Cuál método de solución conviene utilizar para resolver el sistema de ecuaciones planteado? ¿Por qué? ______________________

____

g. Utilicen el método que eligieron para resolver el sistema. Escriban sus operaciones en el recuadro.

h. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ______________________

- ¿Cuál es el conjunto solución? ______________________
- Verifiquen que la solución sea correcta.

i. ¿Qué representa la solución en términos de las variables del problema? ________

____

- ¿Qué le dirían a Julio para ayudarlo? ____

____

2. **Formen parejas y resuelvan.**

En un vivero, un jardinero compró el lunes 13 gardenias y 4 manzanos y pagó \$487. El jueves compró 65 gardenias y 20 manzanos y pagó \$2 435. Le interesa saber cuánto cuesta cada gardenia y cada manzano en ese vivero, pero en sus recibos no se especifica.

a. Llenen la tabla con los datos numéricos del problema.

b. Escriban como enunciados las ecuaciones que representan este problema. ____

____

____

c. Escriban simbólicamente el sistema de ecuaciones que representa este problema. ____

____

d. ¿Cuál método de solución conviene utilizar? ¿Por qué? ________________

____

____

- Utilicen el método que eligieron para resolver el sistema en su cuaderno.

e. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ________________________

- ¿Cuál es el conjunto solución? ________________________
- Verifiquen que la solución sea correcta.

f. ¿Qué representa el conjunto solución en términos de las variables del problema?

____

- ¿Qué encontró el jardinero? ________________________

g. ¿Puede el dueño del vivero vender las gardenias a \$38? ¿Por qué? ________

____

h. Si las gardenias cuestan \$1 cada una, ¿cuánto cuesta cada manzano? Y si cada manzano cuesta \$99, ¿cuánto cuesta cada gardenia? ________________

____

Herramientas académicas

Entra a la página www.esant.mx/fasema2-007 y modifica las ecuaciones de los corredores. Resuelve el sistema para saber en qué punto están a la misma distancia de la meta y verifica tu respuesta.

- **Comparen sus sistemas y soluciones con equipos que hayan usado distintos métodos de solución. Comparen también sus interpretaciones de cada solución. Después, comenten en grupo la siguiente información.**

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden utilizar en gran variedad de situaciones y contextos. Los problemas de sistemas de ecuaciones que has resuelto en esta y otras secuencias pueden servirte como ejemplo para representar problemas diferentes, pero que tienen la misma estructura matemática, es decir, son parecidos en términos de la forma de las ecuaciones o de lo que deseas encontrar. Por ejemplo, equilibrios y mezclas.

3. **Resuelve los problemas en tu cuaderno. Usa el método que te parezca más indicado. Después, contesta.**

Problema 1: Miguel está planeando poner un negocio de postres. Calcula que sus costos fijos semanales serán de \$3 000 y, además, le costará \$10 elaborar cada postre. Si vende sus postres a \$15 cada uno, ¿cuál es el mínimo de postres que debe vender cada semana para que sus ingresos y sus costos sean iguales? ¿Cuánto serán el ingreso y los costos en este caso?

Problema 2: Una fábrica distribuye su producción en dos tiendas. Una de ellas pide el triple de mercancía que la otra, más 10%. Si la producción total es de 42 unidades por semana, ¿cómo se reparte la producción entre las dos tiendas?

a. Interpreta las soluciones en términos del problema correspondiente. Si es necesario, restringe la solución para que el problema tenga sentido. ____________

____

____

____

- **Valida tus respuestas con tus compañeros y comenten si han resuelto problemas similares en esta u otras secuencias.**

Aplica lo aprendido y responde en el cuaderno.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Resuelve en tu cuaderno los problemas como lo hiciste en el resto de la secuencia. Escribe con claridad todo tu procedimiento para cada uno.**

Problema 1: Una máquina sella 500 piezas por hora si la pieza no tiene hoyos y 369 si la pieza tiene hoyos. ¿Cuántas piezas de cada tipo sella la máquina en una semana de trabajo (40 horas) si hay 4 piezas sin hoyos por cada una con hoyos?

Problema 2: Una tienda compró una remesa de faldas y suéteres a \$160 000. Los artículos cuestan \$2 400 y \$2 800 por unidad, respectivamente. Si la remesa contenía 65 artículos que se vendieron a \$4 000 y \$4 400 respectivamente y la ganancia fue de \$96 000, ¿cuántas faldas y cuántos suéteres se compraron?

- **Revisen en grupo sus respuestas. Con ayuda de su profesor resuelvan sus dudas sobre la resolución de sistemas de ecuaciones.**

Reviso mi trayecto

Resuelve los problemas. Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Toma nota de los contenidos que tienes que repasar.

1. **A la casa de Manuela llegó la factura del teléfono por \$1 200.54. Si solo habló a Chile, a donde la llamada cuesta \$9.80 el minuto y a Canadá, a donde cuesta \$8.86 el minuto, ¿cuánto tiempo habló Manuela a cada país, considerando que a Canadá habló el triple de tiempo que a Chile?**

2. **Una universidad cuenta con 240 garrafones de agua al día para empleados de tres facultades. La facultad de educación cuenta con 40 empleados, la de ciencias administrativas con 20 y en ingeniería hay 60 empleados.**

a. ¿Cuántos garrafones se deben entregar en cada facultad de manera que el reparto sea proporcional al número de empleados? ______

b. Si el número de empleados aumentara al doble en cada facultad, ¿cuántos garrafones se tendrían que entregar para que el reparto siguiera siendo proporcional? ______

c. ¿Será posible repartir de manera equitativa 100 garrafones? Explica tu respuesta.

______

______

______

3. **Observa las ecuaciones.**

I.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$

II.
$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 6x + 2y = 6 \end{cases}$$

III.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

a. En cada caso, ¿cuál método de solución usarías para resolver los sistemas? Explícalo. ______

______

b. Determina la solución y el tipo de solución de cada sistema. ______

______

______

Secuencia didáctica

37

Problemas de variación

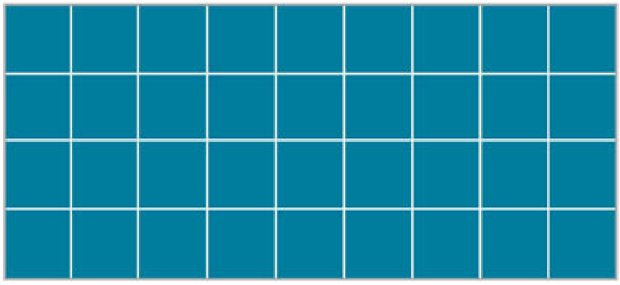
Aprendizaje esperado: Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpretarás y resolverás problemas que se modelan con estos tipos de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Lección 1 Variación lineal e inversa

PUNTO DE PARTIDA

1. Analiza el problema y responde.

A continuación se muestra un ejemplo de cómo se pueden acomodar 36 cuadrados, sin dejar huecos, para formar un rectángulo.



¿Cuántas maneras distintas hay de acomodar los 36 cuadrados para formar un rectángulo sin dejar huecos?

a. Dibuja en tu cuaderno los demás rectángulos posibles.

b. ¿Qué sucede con la altura de los rectángulos a medida que el tamaño de la base aumenta? ¿Y cuando disminuye? ________________

c. Traza en tu cuaderno una gráfica que relacione el tamaño de la base con la altura cuando el rectángulo tiene un área de 36 cuadrados.

d. Si, en lugar de tener un área de 36 cuadrados, el rectángulo tuviera un área de 72 cuadrados y la base fuera de 2 cuadrados, ¿cuál sería su altura? ________

e. Escribe una expresión algebraica que sirva para encontrar la altura (h) de un rectángulo de área de 72 cuadrados cuando se tiene el tamaño de la base. Dibuja la gráfica correspondiente en tu cuaderno. ________

- ¿Cuántos rectángulos diferentes hay con un área de 72 cuadrados? ________

f. ¿Qué sucede con el área del rectángulo cuando aumenta el tamaño de la altura si su base es de 2 cuadrados? ________

- Escribe una expresión algebraica que sirva para encontrar el área del rectángulo para una base de 2 cuadrados y una altura h. ________

g. Dibuja en tu cuaderno la gráfica que relaciona el tamaño de la base con el área del rectángulo cuando su base es de 2 cuadrados.

- **Revisen en grupo sus respuestas y comenten qué variables se relacionan de manera lineal en el contexto del área de un rectángulo, cuáles lo hacen de manera inversa y cómo lo saben.**

Tipos de variación

1. **Lee la situación y responde.**

TRAYECTO FORMATIVO

Sara trabaja en una tienda de ropa en la que le hacen un pago fijo de $1 500 mensuales y, además, le dan 20% de comisión sobre lo que vendió en el mes.

a. Si vendió $15 000 durante un mes, ¿cuánto obtendrá a fin de ese mes? ________

b. Escribe una expresión algebraica que represente la relación entre la cantidad vendida (x) y el sueldo que recibe Sara al final de ese mes (y). ________

- Dibuja en tu cuaderno la gráfica correspondiente a la expresión anterior.

c. ¿Cuánto vendió Sara en otro mes si al final le pagaron $4 000? ________

- ¿Y si le hubieran pagado $5 000? ________

d. Escribe una expresión algebraica que te sirva para encontrar lo que vendió Sara en el mes (x) si conoces lo que le pagaron a fin de mes (y). ________

- Traza en tu cuaderno la gráfica de la expresión algebraica anterior.

e. ¿En qué caso se trata de una variación lineal? ¿Cuándo es una variación inversa?

____

- **Comenten lo que saben acerca de la variación lineal y la variación inversa.**

2. **Resuelve el problema en tu cuaderno.**

Al lanzar una piedra a un estanque, se forman círculos concéntricos en la superficie del agua. El radio del círculo mayor está dado por $r = 0.6t$, donde t es el tiempo transcurrido, en segundos, a partir de que la piedra toca el agua.

a. ¿Cuál es el tiempo transcurrido si el radio del círculo mayor es de 30 cm?
- ¿Y si fuera de 45 cm?

b. Traza la gráfica que relaciona el radio del círculo mayor con el tiempo.

c. Considera la relación entre el tamaño de los círculos y el tiempo transcurrido. ¿Se trata de una relación de variación lineal o inversa? Justifica tu respuesta.

Practicar para avanzar

Resuelve en tu cuaderno.

1. Un jardín se renta para fiestas infantiles a un costo fijo de $3 000 más $150 por niño que asista.

a. Dibuja la gráfica del costo total con respecto al número de niños.

b. Escribe una ecuación que represente la relación entre el número de niños y el costo del banquete.

c. Encuentra el costo de una fiesta para 25 niños y otra para 40 niños.

d. Si un cliente pagó $7 050 por una fiesta en ese jardín, ¿cuántos niños asistieron?

e. Escribe una ecuación que sirva para encontrar el número de niños que asistieron a la fiesta, dada la cantidad total que se pagó y dibuja su gráfica.

Lección 2

Solución de problemas de variación

1. **Reúnete con un compañero para resolver el problema.**

Mariana, Claudia, Andrés y Rafael realizan un viaje de 3 horas desde la Ciudad de México. Mariana viaja en bicicleta, Claudia en tren, Andrés en autobús y Rafael en avión. ¿A qué lugar pudo haber viajado cada uno?

a. Encuentren en un mapa de México al menos un destino para cada persona y escriban la distancia recorrida.

Mariana: ______________ Claudia: ______________

Andrés: ______________ Rafael: ______________

b. ¿Qué fórmula se puede utilizar para encontrar las distancias? ______________

c. ¿Qué sucede con la distancia recorrida a medida que la velocidad aumenta?

____

d. Tracen en su cuaderno una gráfica que relacione la velocidad con la distancia recorrida, para un tiempo de 3 horas.

e. Localicen el recorrido de cada persona en la gráfica, es decir, el punto que representa la velocidad a la que viajó y la distancia que recorrió.

2. **Retomen el problema anterior y hagan lo que se pide.**

En otro viaje, Mariana, Claudia, Andrés y Rafael recorrieron una distancia de 500 km.

a. ¿Cuánto tardó cada uno si utilizaron los mismos medios de transporte que en el caso anterior?

Mariana: ______________ Claudia: ______________

Andrés: ______________ Rafael: ______________

b. ¿Qué fórmula se puede utilizar para encontrar el tiempo? ______________

c. ¿Qué sucede con el tiempo a medida que la velocidad aumenta? ______________

____

d. Dibujen en su cuaderno una gráfica que relacione la velocidad con el tiempo para una distancia de 500 km.

e. Localicen el recorrido de cada persona en la gráfica. Recuerden que se trata de un punto para cada una.

f. ¿Cómo se comparan las expresiones algebraicas y las gráficas en cada problema? ______________

g. ¿En qué casos se trata de una variación lineal y en cuáles, de una variación inversa? ______________

____

- **Comenten con sus compañeros y profesor sus respuestas y los procedimientos que siguieron para encontrarlas.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **En grupos de 3 o 4 estudiantes, realicen un registro de la manera en que se carga la batería de un celular. Sigan los pasos que se indican.**

   a. Anoten el porcentaje de capacidad de la batería del celular antes de cargarse.

   ____

   b. Conecten el celular a la corriente y registren, cada 2 minutos, el avance en el porcentaje de capacidad de la batería. Usen una tabla como la siguiente para registrar sus resultados.

Tiempo (minutos)	Porcentaje de capacidad de la batería
2	
4	
6	

   c. Grafiquen en su cuaderno la relación entre el tiempo transcurrido y el porcentaje de capacidad de la batería.

   d. ¿Se trata de una relación lineal? ¿Cómo lo saben? ______________________________

   e. ¿Es una relación de variación inversa? Justifiquen su respuestas. ______________________________

2. **Analiza la gráfica y responde en tu cuaderno.**

   a. La gráfica de la derecha muestra el recorrido de Marta y de Raúl de su casa hasta la tortillería.
      - ¿Cuál es la distancia de la casa de Marta y Raúl a la tortillería?
      - ¿Cuánto tardó cada uno en llegar a la tortillería?
      - ¿Cuál es la velocidad de Marta para llegar a la tortillería? ¿Y la de Raúl?

   b. Dibuja una gráfica para Marta y una para Raúl que relacione el tiempo transcurrido con la distancia recorrida.

   c. Escribe una expresión que relacione el tiempo transcurrido con la distancia recorrida para Marta y una para Raúl.

- **Explica en tu cuaderno lo que aprendiste sobre los problemas de variación lineal e inversa. Compártelo con el grupo con ayuda del profesor.**

Secuencia didáctica

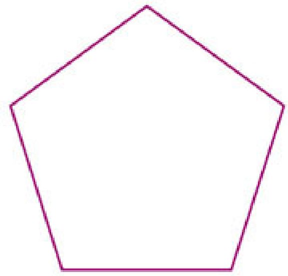
38 Área de polígonos regulares

Aprendizaje esperado: Calcularás el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Lección 1 Subdivisión de un polígono en figuras conocidas

PUNTO DE PARTIDA

1. **Observa la figura y haz lo que se solicita.**



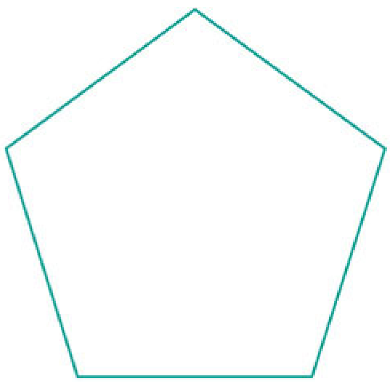
a. Si no conoces la fórmula para encontrar el área de un pentágono regular, ¿cómo puedes subdividir este polígono en triángulos o en cuadriláteros para calcular su área? Ilustra tu respuesta en el pentágono de la derecha.

- **Compara tu respuesta con las de dos compañeros y comenten qué datos necesitan para calcular el área del pentágono a partir de la división que cada uno realizó.**

Deducción de la fórmula para encontrar el área

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Sigue los pasos que se proponen. Utiliza regla y compás.**



i. Elige un lado del pentágono de la izquierda y traza su **mediatriz**. Para eso, dibuja dos circunferencias del mismo tamaño en los vértices del lado que elegiste, de tal forma que se intersequen en dos puntos. Une los puntos con una línea y prolóngala.
ii. Repite el proceso con otro lado del pentágono.
iii. Marca el **circuncentro**.
iv. Traza la circunferencia con centro en el circuncentro y que pase por uno de los vértices del pentágono.

- ¿Qué sucede entre la circunferencia y los vértices del polígono? ____________________

v. Une con segmentos de recta el circuncentro con cada vértice del polígono.
- ¿Qué tipo de triángulos se forman? ____________________
- ¿Qué datos necesitas conocer o medir para obtener el área de cada triángulo? ____________________

a. Con una regla, obtén los datos que necesitas y calcula el área de cada triángulo. Una vez que la hayas calculado, ¿cómo puedes encontrar el área del pentágono? ____________________

- Representa, con una expresión algebraica, el área del pentágono.

____

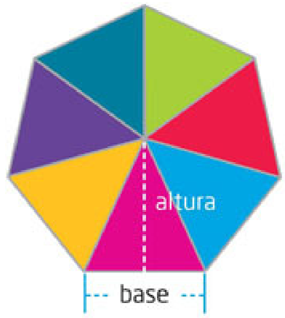
Glosario

mediatriz. Es la recta perpendicular a un segmento o lado que pasa por su punto medio.

circuncentro. Es el punto donde se intersecan las mediatrices.

2. **Analiza la fórmula y responde.**

$$\text{Área de un heptágono} = \text{Suma del área de los 7 triángulos} = \frac{7 \times \text{Base} \times \text{altura}}{2}$$



a. ¿Se obtiene el mismo resultado si se calcula el área de uno de los triángulos y se multiplica por 7 que si se multiplica 7 × base × altura y luego se divide entre 2? ¿Por qué? ______________________

____

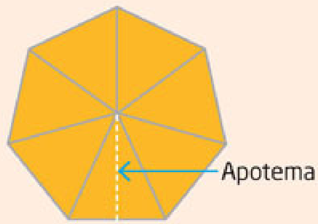
b. ¿Qué nombre se da al resultado de multiplicar la base de uno de los triángulos por 7? ______________________

c. Con base en la respuesta del inciso *b*, escribe una fórmula para calcular el área del heptágono. ______________________

____

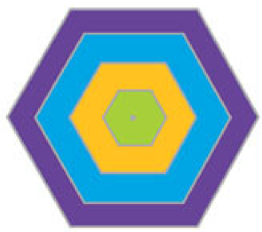
- **Analiza con tus compañeros si sus fórmulas funcionan con cualquier polígono.**

A la altura del triángulo que se ha empleado se le denomina **apotema**. La apotema es el segmento perpendicular a un lado del polígono que une el punto medio del lado con el circuncentro.



Practicar para avanzar

Lee la situación y responde.



1. Una fuente está adornada con anillos hexagonales de distintos colores. Considera que el anillo morado tiene lados de 4 m y el hexágono verde tiene lados de 1 m. Además, la apotema del hexágono verde y el ancho de los anillos es de 0.87 m.

   a. ¿Cuánto mide el área del hexágono verde del centro? ______________________

   b. ¿Cuánto mediría el área del hexágono amarillo si no tuviera el hexágono verde en su interior? ______________________

   c. ¿Qué operación debes hacer para encontrar el área del anillo amarillo si conoces el área del hexágono amarillo y del hexágono verde? ______________________

   ____

   d. ¿Qué tienes que hacer para encontrar el área del anillo hexagonal azul? ______________________

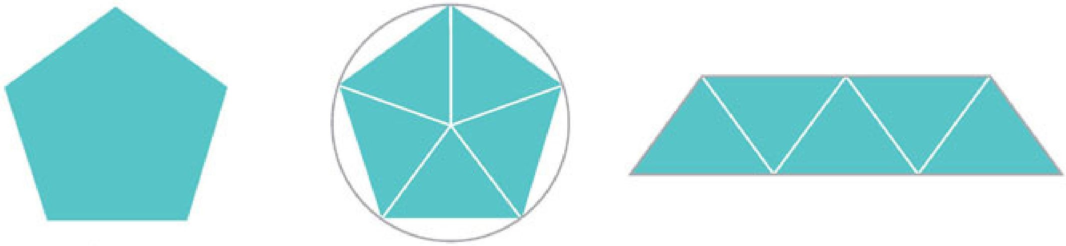
   ____

   e. ¿Cuánto miden las áreas de los anillos hexagonales? ______________________

   Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Corrige si es necesario.

Lección 2 La fórmula

1. **Observa los pasos que se ilustran y haz lo que se pide.**



Paso 1 Paso 2 Paso 3

a. Describe el procedimiento que se sigue en la ilustración. ____________

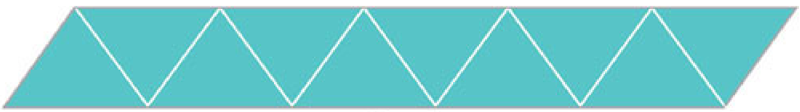
____

____

____

- ¿Cómo se llama el cuadrilátero que se forma con el pentágono? ____________

b. Observa la figura del paso 4, en la cual se copia el cuadrilátero del paso 3, se rota 180° y se une al original. Luego contesta.



Paso 4

- ¿Cómo se llama el cuadrilátero que se forma en el paso 4? ____________
- ¿Qué relación hay entre la base del cuadrilátero del paso 4 y el perímetro del pentágono del paso 1? ____________
- ¿Cómo se calcula el área del cuadrilátero del paso 4? ____________

  ____
- ¿Qué se tiene que hacer para calcular el área del pentágono a partir del área del cuadrilátero? ____________
- Explica por qué el área del pentágono se calcula multiplicando su perímetro por la altura de uno de los triángulos que lo conforman y dividiendo el resultado entre dos. ____________

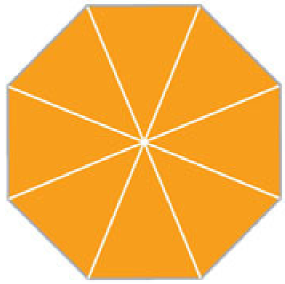
  ____

  ____

  ____
- Con base en lo anterior, escribe una fórmula para encontrar el área de un pentágono regular. ____________

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten si la fórmula funciona para todos los polígonos regulares y si equivale a la que obtuvieron antes.**

2. **Lee los pasos para deducir la fórmula del área de un octágono y contesta.**



i. Encuentra el circuncentro del octágono.
ii. Divide el octágono en ocho triángulos iguales.
   - ¿Qué cuadrilátero se forma al juntar los ocho triángulos? ____________________

iii. Copia el cuadrilátero y únelo con el original
   - ¿Por qué no es necesario rotarlo 180°? ____________________
   - ¿Por qué es necesario duplicar el paralelogramo en la justificación de la fórmula del área? ____________________

3. **A partir de lo que has hecho, explica en tu cuaderno la siguiente fórmula.**

$$\text{Área de un polígono regular} = \frac{(\text{Perímetro} \times \text{apotema})}{2}$$

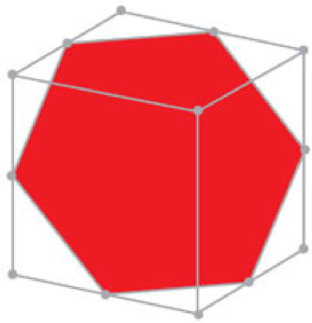
- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Formen equipos de tres alumnos y hagan la actividad siguiente.**

Al unir los puntos medios de seis aristas de un cubo, como se muestra en la figura de la derecha, se obtiene un hexágono regular.



a. Con material reciclable, construyan un cubo con un hexágono regular en su interior.
b. Con una regla, obtengan las medidas necesarias y calculen el área del hexágono.
   - ¿Qué es mayor: el área del hexágono o el área de una cara del cubo? ____________________

2. **Calcula el área del hexágono regular cuyos lados miden 4 cm y su apotema 3.5 cm.**

a. Si se duplica la medida de cada lado y de la apotema, ¿también se duplicará su área? Si no es así, ¿cuántas veces es más grade el área del hexágono cuyos lados miden el doble? ____________________
b. Si se triplica la medida de los lados y de la apotema, ¿cuántas veces más grande será el área del hexágono que la del hexágono original? ____________________

- **Presenten al grupo sus resultados, argumenten y validen sus respuestas con el profesor y, si es necesario, corrijan.**

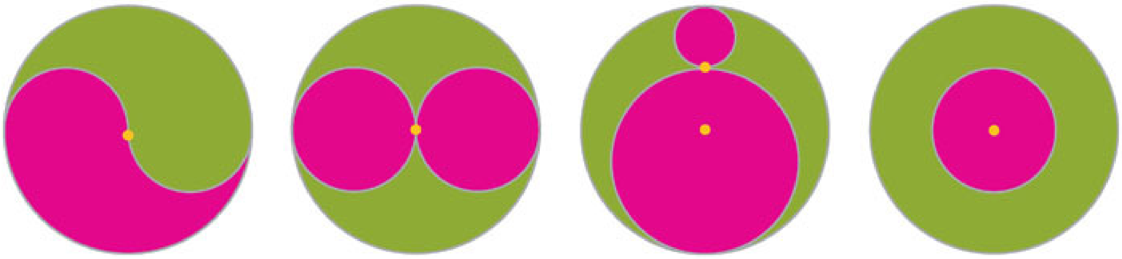
Área del círculo

Aprendizaje esperado: Calcularás el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Lección 1 El círculo y la circunferencia

PUNTO DE PARTIDA

1. Luis puso como reto decidir en cuáles de los siguientes diseños se usa la misma cantidad de pintura verde y magenta y explicar por qué.



a. Observa los diseños y rodea los que tienen la misma cantidad de pintura verde y magenta.

b. Compara tus respuestas con las de un compañero. Luego contesten.

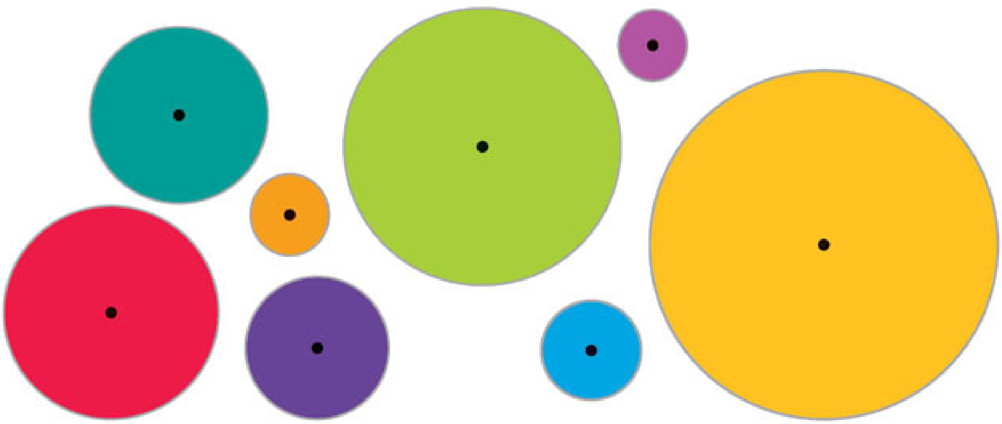
- ¿Qué figuras se usaron para construir los diseños? ______
- ¿Qué indica el punto en cada diseño? ______
- ¿Qué tienen en común los cuatro diseños? ¿En qué son diferentes? ______
- ¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia? ______

- **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.**

El círculo y su área

TRAYECTO FORMATIVO

1. Observa en qué se parecen y en qué son diferentes los círculos.



a. Elige un círculo, traza uno de sus radios, un diámetro e identifica el área y su circunferencia.

b. ¿Qué propiedad tienen los radios de la misma circunferencia? ________________

____

c. ¿Ocurre lo mismo con los diámetros? ¿Por qué? ________________

____

d. ¿Qué relación hay entre el radio y el diámetro de la misma circunferencia? ______

____

e. ¿Cuál de los círculos tiene mayor superficie? ¿Cómo lo sabes? ________________

____

f. ¿Con qué estrategia puedes comparar las superficies de los círculos? __________

____

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Un **círculo** es el conjunto de puntos del plano que están dentro de la circunferencia.

2. Una forma de comparar cuánta pintura se usó en los diseños de la actividad inicial es conocer cuánta superficie ocupa cada uno, es decir, calcular sus áreas.

a. Propón dos ideas para calcular el área del círculo a partir de lo que aprendiste sobre el área de polígonos.

Idea 1. ____

____

Idea 2. ____

____

- **Reúnete con un compañero, comparen sus ideas y calculen el área de un círculo con 2 cm de radio.**

Practicar para avanzar

1. En parejas calculen el área de los círculos de la derecha utilizando las estrategias que propusieron. Noten que el radio de la circunferencia pequeña mide la mitad del radio de la otra circunferencia.

a. ¿Se puede asegurar que el área del círculo pequeño es la mitad del área del círculo grande? ¿Por qué? ________________

____

Comparen las respuestas con otros equipos y coméntenlas con su profesor.

Lección 2

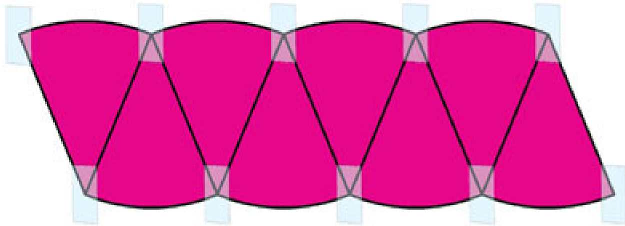
Una fórmula para calcular el área de un círculo

1. En equipos de tres integrantes, consigan tijeras, regla, compás, cinta adhesiva y hojas recicladas, y sigan las instrucciones.

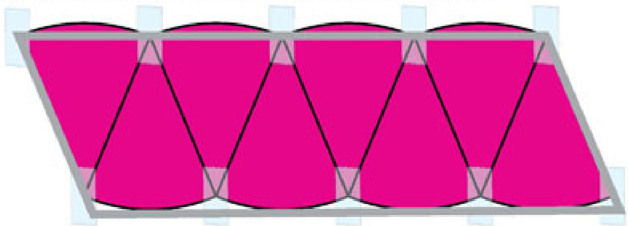
i. Cada uno trace una circunferencia de 3 cm de radio con el compás.
ii. Pónganse de acuerdo y dividan los círculos en 4, 6 y 16 sectores circulares.
iii. Recorten los sectores circulares.
iv. Sobre una hoja de papel, unan los lados rectos de los sectores circulares con cinta adhesiva, como se muestra en la imagen.

Herramientas académicas

Entra a la página www.esant.mx/fasema2-008. Modifica el número de lados del polígono y observa lo que sucede.



v. Tracen con una regla los segmentos en la de parte superior e inferior de la figura que formaron. Observen el ejemplo.



a. ¿Qué polígono se formó con las líneas que trazaron? ______________

b. ¿Es posible calcular el área del círculo a partir del polígono formado? ¿Por qué?

____

c. ¿Qué relación tienen la base y la altura del polígono con el radio del círculo?

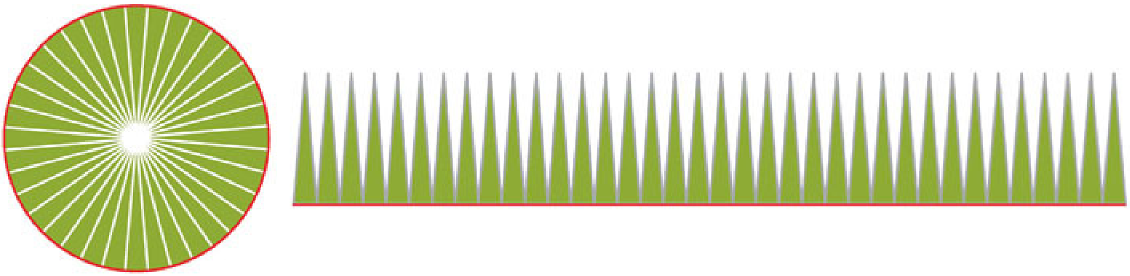
____

d. Propongan una fórmula para calcular el área de círculo. ______________

2. Observa la imagen y haz lo que se pide.

a. Describe el procedimiento que se realizó para obtener la imagen de la derecha a partir del círculo de radio *r*. ______________

____



b. ¿Qué representa la línea roja? ¿Cómo se calcula su longitud? ___

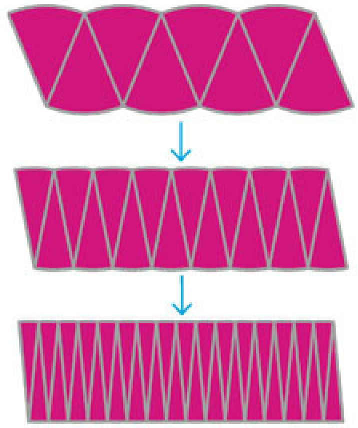
c. ¿Qué se debe hacer para obtener una figura similar a la que construiste? ___

d. Observa tus figuras y la imagen de la derecha. ¿Qué figura se va formando conforme el círculo se divide en más y más sectores circulares? ___

e. ¿Cuánto miden la base y la altura de la figura que se forma?

___

___



3. Lee la información y escribe en tu cuaderno por qué se llega a esa afirmación.

A medida que se divide el círculo en un mayor número de sectores, la figura que se obtiene se asemeja más a un romboide. La base del romboide mide la mitad del perímetro del círculo (longitud de la circunferencia), es decir, πr y su altura es igual al radio (r). La fórmula para calcular el área del romboide es multiplicando la base por la altura, es decir, $A = b \times a = \pi r \times r$.
Con base en lo anterior se observa que la expresión matemática que sirve para calcular el área de cualquier círculo es $A = \pi r^2$.

Aplica lo que aprendiste.

1. Luis elaboró con GeoGebra los diseños que usó en la feria de Matemáticas. Utilizó las herramientas del programa para conocer el área de los círculos. La imagen muestra los datos del segundo diseño.

PUNTO DE LLEGADA

a. Responde con base en la información.

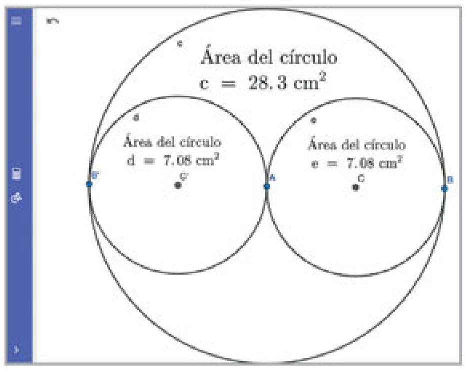
- ¿De qué color se usó más pintura? ¿Por qué? ___

___

- ¿Cuánto mide el radio de cada circunferencia? ___

___

b. Calcula las áreas de los demás diseños elaborados por Luis e identifica en qué casos se usó una mayor, menor o igual cantidad de pintura magenta que verde.



- **Compara tus resultados con el resto del grupo, revisen sus procedimientos y, si es necesario, corrijan.**

Resuelvo con tecnología

Aproximación del área del círculo

Reúnete con un compañero y sigan los pasos para aproximar el área del círculo.

1. Entren a la página de GeoGebra y den clic en GeoGebra Geometría.

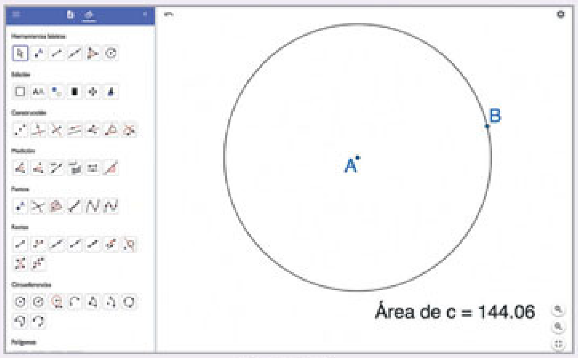


Imagen 1

2. Tracen una circunferencia y, con la herramienta de la sección Medición, Área, calculen el área del círculo. Para lo anterior, hagan clic en cualquier punto de la circunferencia.

3. Para inscribir polígonos de diferente número de lados, inserten un deslizador con el icono que se muestra en la imagen 2. Si no ven el icono, den clic en MÁS en la parte inferior del menú de la izquierda.

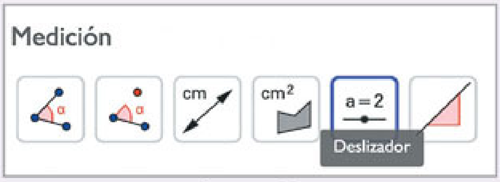


Imagen 2

Imagen 3

4. Den clic en la parte inferior de la ventana. Aparecerá la ventana de diálogo que se muestra en la imagen 3. Elijan la opción "Entero", ingresen los valores: Mín 3, Máx 100 e Incremento 1, como se muestra en la imagen 3. Luego den clic en OK.

5. Con la herramienta Ángulo dada su amplitud tracen un ángulo. Seleccionen los puntos *B* y *A*, en ese orden, e ingresen el "360/n°" en la pantalla que aparece. Observen que GeoGebra realiza el cálculo dependiendo del valor del deslizador *n*.
Den clic en OK y observen que aparece un punto sobre la circunferencia.

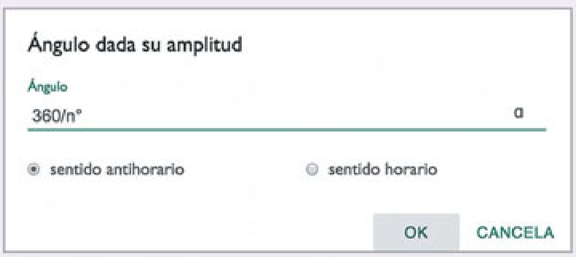


Imagen 4

6. Con la herramienta Polígono regular, seleccionen ambos puntos sobre la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj. En la ventana que aparece, ingresen *n* como el número de vértices. Luego den clic en OK.

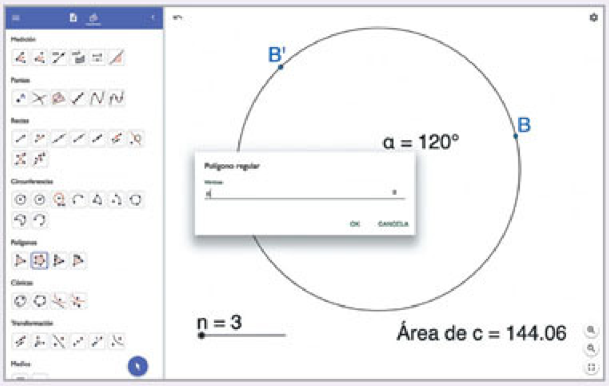


Imagen 5

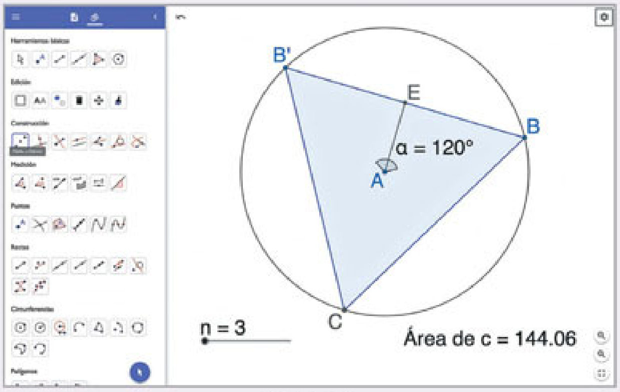


Imagen 6

7. Tracen la apotema del polígono. Con la herramienta de Construcción, Medio o centro, ubiquen el punto medio de uno de los lados y unan el centro de la circunferencia con este punto mediante un segmento de recta.

8. Con la herramienta Área, obtengan el área del polígono.

9. Seleccionen el punto que aparece sobre el deslizador y muévanlo a la derecha poco a poco. Observen que aumentan el número de lados y el área del polígono.

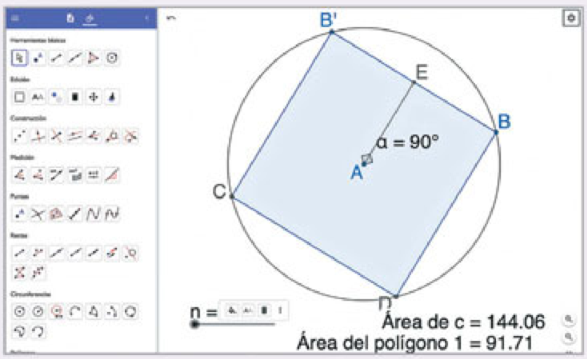


Imagen 7

a. ¿Qué pasa con el área del polígono conforme va aumentando el número de lados en relación al área del círculo? ______________________

b. ¿Qué ocurre con la apotema del polígono conforme aumenta el número de lados? ______________________

c. ¿Qué relación tiene la apotema con el radio conforme se incrementa el número de lados? ______________________

Con base en sus respuestas, y con ayuda del profesor, qué relación encuentran entre la fórmula del área del círculo y la fórmula del área del polígono cuando se incrementa el número de lados.

Secuencia didáctica

40

Volumen de prismas y cilindros

Aprendizaje esperado: Calcularás el volumen de prismas y cilindros rectos.

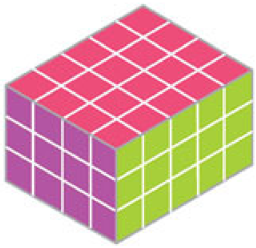
Lección 1

Volumen de prismas rectangulares

PUNTO DE PARTIDA

1. Observa la figura y responde.

Cada uno de los cubos que conforman el prisma tiene un volumen de 1 cm^3.



a. ¿Cuánto mide el área de la base del prisma? ________

b. ¿Cuánto mide su altura? ________

c. ¿Cuánto mide el volumen del prisma? ________

d. Si colocas el prisma de tal manera que su base sea la cara que mide 3 × 4 cm, ¿cuánto mide la altura del prisma? ________

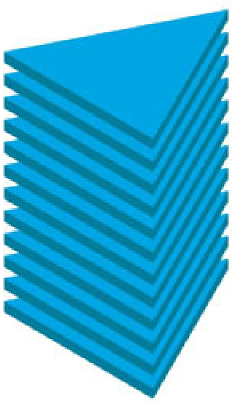
e. ¿Cuánto mide su volumen? ________

- **Comenta con tus compañeros si en un prisma rectangular es importante decidir cuál de las caras es la base para calcular su volumen. Justifiquen su repuesta.**

Volumen de prismas

TRAYECTO FORMATIVO

1. Observa la imagen, analiza la información y contesta.



Para encontrar el volumen del prisma triangular de la izquierda, se han hecho cortes transversales paralelos de 1 cm de alto de tal manera que el triángulo de la base se repite muchas veces.

En general, el volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura del prisma.

a. Si los lados del triángulo miden 12 cm y su altura 10.39 cm, ¿cuál es el volumen del prisma? ________

b. Si la base del prisma fuera un polígono regular, ¿cuál sería la fórmula para encontrar su área? ________

c. ¿Cuál es la fórmula para encontrar el volumen de un prisma poligonal? ________

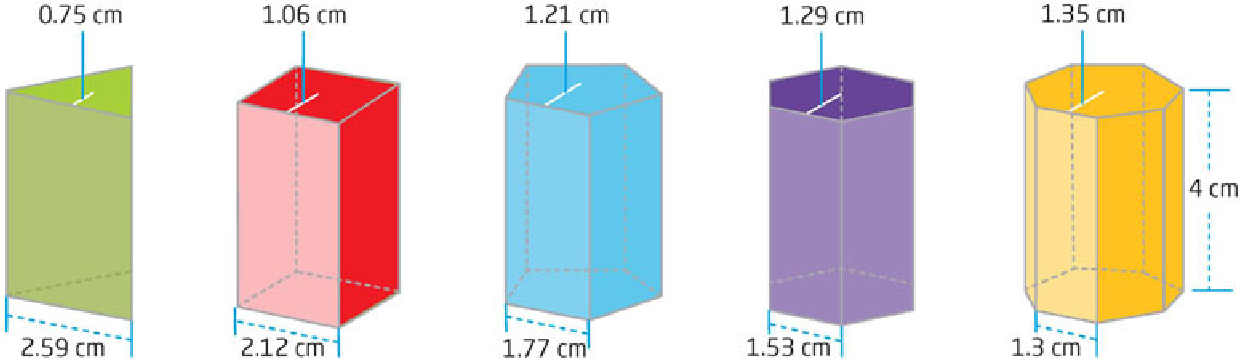
____

d. Si en lugar de conocer la altura del triángulo se conociera la distancia de su circuncentro al punto medio de uno de sus lados (apotema), ¿se podría utilizar la fórmula del inciso *c*? ________

____

- **Calcula el volumen del prisma utilizando una apotema de 3.46 cm y valida que obtienes el mismo resultado que en el inciso *a*.**

2. **Calcula el volumen de cada prisma y en cada caso anota la fórmula con los datos correspondientes. Todos los prismas tienen una altura de 4 cm y sus bases son polígonos regulares. Anota tus resultados en la tabla.**



Prisma	Perímetro de la base	Área de la base	Volumen del prisma
Triangular			
Cuadrangular			
Pentagonal			
Hexagonal			
Heptagonal			

a. Para calcular el volumen de un **prisma rectangular** es indistinto cuál de sus caras se considera la base. ¿Ocurre lo mismo con un prisma hexagonal? ¿Por qué?

____

____

- ¿Es correcto multiplicar el área de la cara rectangular por el doble de la apotema del hexágono para encontrar su volumen? ¿Por qué? _______________

____

- **Comparte con tus compañeros tus respuestas y preséntaselas a tu profesor.**

Practicar para avanzar

1. Resuelve el problema.

El Fuerte de Acapulco tiene un patio central en forma de prisma pentagonal. Si cada lado mide 30 m, la apotema mide 20.65 m y la altura mide 5 m, ¿cuál es el volumen de ese espacio?

Volumen del patio: _______________

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Corrige si es necesario.

Lección 2

¿Cuánto deben medir?

1. Lee el problema y haz lo que se pide.

Una caja octagonal tiene un volumen de 812 cm^3. Si la apotema mide 7 cm y la altura de la caja es de 5 cm, ¿cuánto mide el perímetro de la caja?

a. Observa el ejemplo y explica qué operación se realizó en cada paso.

$$\text{Volumen} = \frac{P \times a}{2} \times h$$

i. $\frac{812}{5} = \frac{\frac{P \times 7}{2} \times 5}{5}$ Se dividen ambos lados de la ecuación entre 5.

ii. $162.4 = \frac{P \times 7}{2}$ ____________________

iii. $162.4 \times 2 = \frac{P \times 7}{2} \times 2$ ____________________

iv. $324.8 = P \times 7$ ____________________

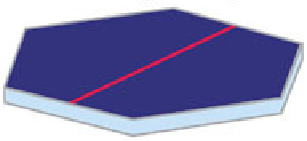
v. $\frac{324.8}{7} = \frac{P \times 7}{7}$ ____________________

vi. $46.4 = P$ ____________________

Al procedimiento de dejar únicamente la incógnita *P* de uno de los lados de la ecuación se le conoce como despeje.

2. Resuelve el problema con base en lo que has aprendido.

La imagen representa uno de los 52 pisos de una torre hexagonal que tiene 365 040 m^3 de volumen. Si cada lado del hexágono mide 30 m y la altura de cada piso es de 3 m, ¿cuánto mide la distancia entre las ventanas opuestas del edificio?



a. ¿Cómo puedes determinar la distancia entre ventanas opuestas del edificio? ____________________

____

b. Sustituye los valores que se conocen en la fórmula y despeja el valor que se necesita saber.

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros.**

El volumen de un cilindro

3. **Reúnete con un compañero y respondan.**

a. ¿A qué figura se asemeja un prisma conforme aumenta el número de lados de su base? ______

b. ¿Se puede utilizar la misma fórmula para calcular su volumen? ______

______

c. ¿Qué forma tiene la base de un cilindro? ______

d. ¿Cómo se calcula el área de esa figura? ______

e. Escriban la fórmula para calcular el volumen de un cilindro cuya altura mide *h* y cuyo radio mide *r* centímetros.

Volumen: ______

4. **Utilicen la fórmula que obtuvieron para resolver el problema.**

Una pipa cilíndrica cuyo interior mide 4 m de largo y tiene un radio 0.80 m está llena de agua. El líquido será vaciado en tinacos cilíndricos que tienen un diámetro de 1.10 m y una altura de 1.40 m. Calcula el volumen y la capacidad de la pipa y los tinacos, y el número de tinacos que se pueden llenar con el agua de la pipa. Considera que $1\ \text{dm}^3 = 1$ L. Anota tus operaciones en el recuadro.

- **Compartan sus respuestas con sus compañeros.**

5. **En parejas, consigan una lata de refresco y hagan lo que se pide.**

a. Midan el diámetro de la base y su altura. Supongan que se trata de un cilindro perfecto y calculen su volumen, su capacidad y su superficie total. Considera que $1\ \text{cm}^3 = 1$ mL. ______

______

b. ¿Es posible diseñar otra lata de refresco que contenga el mismo volumen, pero cuya superficie tenga un área diferente? ______

c. Si se conocen el volumen y el radio, ¿cómo se puede calcular la medida de la altura de la lata? ______

______

- **Compartan sus respuestas con sus compañeros.**

Si se desdobla un cilindro, con su cara lateral se forma un rectángulo cuya base tiene la misma longitud que la circunferencia del círculo. De esto se deduce que para calcular el área lateral del cilindro se puede usar la fórmula:

$$\text{Área lateral} = 2\pi rh$$

6. Retomen el problema de las latas y hagan lo que se indica para verificar si pueden tener la misma capacidad y diferente superficie.

a. Si la capacidad de la lata es la misma y el radio aumenta, ¿qué ocurrirá con la altura? ____________________

b. Completa la tabla. En la segunda columna, escriban diferentes valores para el radio y calculen la altura para que la capacidad sea de 350 mL. Luego, con base en esto, encuentren el área de la base, el área lateral y el área total.

Capacidad de la lata	Radio de la base	Altura del cilindro	Área de la base	Área lateral	Área total
350 mL	1 cm				
350 mL	2 cm				
350 mL					
350 mL					

- ¿Es posible diseñar una lata con la misma capacidad y menos superficie que las que se venden en las tiendas? ____________________
- ¿Por qué piensan que las latas de refresco usualmente tienen esas dimensiones y no otras? ____________________
- ¿Qué otros factores se tendrán en cuenta al decidir qué dimensiones tienen las latas de refresco? ____________________

- **Comparen sus resultados con la respuesta que dieron al principio del ejercicio.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. Cuatro cubos de hielo que miden 4 cm por lado se dejan derretir en un vaso cilíndrico vacío que tiene un radio de 3 cm.

a. ¿Qué volumen tiene cada cubo? ____________________

b. ¿Qué volumen de agua tendrá el vaso? ____________________

c. ¿Qué altura alcanzará el agua dentro del vaso una vez que los hielos se hayan derretido por completo? ____________________

- **Comenta con tus compañeros cuáles operaciones tuviste que llevar a cabo para resolver los problemas anteriores.**

Reviso mi trayecto

Resuelve los problemas. Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Toma nota de los contenidos que tienes que repasar.

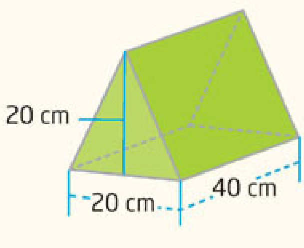
1. **El Departamento de Defensa de Estados Unidos de América, conocido, como el Pentágono, tiene la forma de este polígono regular. Su superficie es de 135 580.02 m^2 y cada uno de sus lados mide 280.72 m. Calcula la apotema de la construcción.**

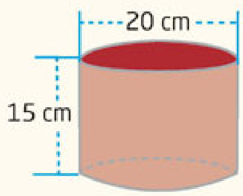
2. **Resuelve los problemas e indica si son de variación lineal o inversa.**

a. En un centro vacacional, la noche en una habitación ecológica cuesta $3 000. ¿Cuál es el costo de 5 habitaciones ecológicas? ¿Y de 10 habitaciones?

b. Una llave vierte 80 litros por hora y tarda 4.5 horas en llenar una cisterna. ¿Cuánto tiempo tomará llenar la misma cisterna si se tiene una llave extra que vierte 48 litros por hora?

3. **Calcula el volumen de los cuerpos geométricos.**





$V =$ ______________ $V =$ ______________ $V =$ ______________

Sistema métrico decimal

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Lección 1

Comparación de medidas

PUNTO DE PARTIDA

1. En equipos, analicen los problemas y contesten.

Problema 1. La línea 12 del metro de la Ciudad de México tiene 25 km de longitud, mientras que la línea 8 tiene 20 000 m. ¿Cuál de esas líneas es más larga? ________

Problema 2. Según una receta, para hacer una pizza se necesitan 1 taza de harina y $\frac{3}{4}$ de taza de agua tibia, entre otros ingredientes.

- ¿Cuántas pizzas se pueden hacer con 1 kg de harina? Considera que una taza contiene entre 120 y 130 gramos de harina. ________
- Si la capacidad de una taza es de 250 mL, ¿cuánta agua se necesita para elaborar 10 pizzas? ________ ¿Es más o menos que un litro? ________

- **Compartan sus respuestas con sus compañeros y comenten con ellos si tienen la información necesaria para resolver los problemas.**

Múltiplos y submúltiplos del metro

TRAYECTO FORMATIVO

1. El diagrama muestra la relación entre las medidas de longitud. Léelo detenidamente y haz lo que se pide.

Múltiplos — Submúltiplos

Kilómetro (km) $\xleftarrow{\div 10}$ Hectómetro (hm) $\xleftarrow{\div 10}$ Decámetro (dam) $\xleftarrow{\div 10}$ Metro (m) $\xleftarrow{\div 10}$ Decímetro (dm) $\xleftarrow{\div 10}$ Centímetro (cm) $\xleftarrow{\div 10}$ Milímetro (mm)

Kilómetro (km) $\xrightarrow{\times 10}$ Hectómetro (hm) $\xrightarrow{\times 10}$ Decámetro (dam) $\xrightarrow{\times 10}$ Metro (m) $\xrightarrow{\times 10}$ Decímetro (dm) $\xrightarrow{\times 10}$ Centímetro (cm) $\xrightarrow{\times 10}$ Milímetro (mm)

a. Con la información anterior, calcula a cuántos metros equivale cada medida.

- 1 km = ________
- 1 dam = ________
- 1 cm = ________
- 1 hm = ________
- 1 dm = ________
- 1 mm = ________

b. Retoma el problema 1, con base en el ejemplo de abajo, haz la conversión y contesta qué línea es más larga. ________

- 15 hm equivalen a 1 500 m.
- 25 km equivalen a ________ m.

Kilómetro (km)	Hectómetro (hm)	Decámetro (dam)	Metro (m)	Decímetro (dm)	Centímetro (cm)	Milímetro (mm)
	15	0	0			

Múltiplos y submúltiplos del litro

2. **El diagrama muestra la relación entre las medidas de capacidad. Obsérvalo y completa las equivalencias.**

Múltiplos | Submúltiplos

Kilolitro (kL)		Hectolitro (hL)		Decalitro (daL)		Litro (L)		Decilitro (dL)		Centilitro (cL)		Mililitro (mL)
	÷10		÷10		÷10		÷10		÷10		÷10	
	×10		×10		×10		×10		×10		×10	

- 1 kL = ______________
- 1 hL = ______________
- 1 daL = ______________
- 1 dL = ______________
- 1 cL = ______________
- 1 mL = ______________

a. Observa las equivalencias anteriores. Retoma el problema 2 y contesta qué cantidad de agua se necesita para hacer las pizzas. Apóyate con el diagrama.

Kilolitro (kL)	Hectolitro (hL)	Decalitro (daL)	Litro (L)	Decilitro (dL)	Centilitro (cL)	Mililitro (mL)

- **Compara tus respuestas del problema inicial con las que obtuviste en las actividades. Si no obtuviste el mismo resultado analiza por qué.**

Practicar para avanzar

1. Observa los ejemplos y haz las conversiones.

a. 25.5 km son 25 500 m.
b. 18 dm son 1 800 mm.
c. 28 cm son __________ m.
d. 120 m son __________ km.
e. 50.2 cm son __________ m.
f. 15 mm son __________ m.

Kilómetro (km)	Hectómetro (hm)	Decámetro (dam)	Metro (m)	Decímetro (dm)	Centímetro (cm)	Milímetro (mm)
25	5	0	0			
				18	0	0

Comenta con tus compañeros en qué situaciones es necesario hacer conversiones entre unidades.

Lección 2

Múltiplos y submúltiplos del gramo

1. **En el diagrama se muestran las relaciones entre las unidades de masa**

Múltiplos — Submúltiplos

Kilogramo (kg)		Hectogramo (hg)		Decagramo (dag)		Gramo (g)		Decigramo (dg)		Centigramo (cg)		Miligramo (mg)
	÷10 / ×10		÷10 / ×10		÷10 / ×10		÷10 / ×10		÷10 / ×10		÷10 / ×10	

a. Con la información anterior, calcula a cuántos metros equivale cada medida.

- 1 kg = ____________
- 1 hg = ____________
- 1 dag = ____________
- 1 dg = ____________
- 1 cg = ____________
- 1 mg = ____________

b. Retoma la información del problema 2 del inicio de la secuencia y responde cuántas pizzas se pueden hacer con 1 kg de harina. ____________

Kilogramo (kg)	Hectogramo (hg)	Decagramo (dag)	Gramo (g)	Decigramo (dg)	Centigramo (cg)	Miligramo (mg)

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Realiza las conversiones.**

a. Unidades de masa.

- 45.5 kg son ____________ g.
- 50 mg son 0.050 g.
- 250 g son ____________ kg.
- 12 cg son ____________ g.
- 67.8 kg son ____________ g.
- 2 dag son ____________ mg.

Kilogramo (kg)	Hectogramo (hg)	Decagramo (dag)	Gramo (g)	Decigramo (dg)	Centigramo (cg)	Miligramo (mg)
			0.	0	5	0

b. Unidades de capacidad.

- 12 hL son ________________ L.
- 35 mL son ________________ L.
- 78 L son ________________ daL.
- 64 cL son ________________ daL.
- 60 hL son 6 000 L.
- 50 cL son ________________ mL.

Kilolitro (kL)	Hectolitro (hL)	Decalitro (daL)	Litro (L)	Decilitro (dL)	Centilitro (cL)	Mililitro (mL)
	60	0	0			

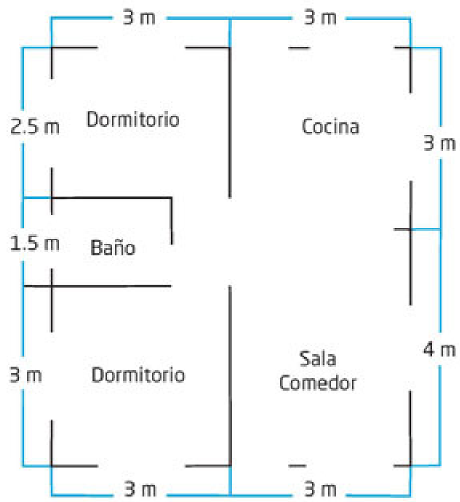
2. Analiza la información que muestra el plano de la casa y responde.

a. Se quiere colocar en los dormitorios una alfombra de uso rudo que mide 150 cm de ancho.

- ¿Cuántos metros lineales de alfombra se usarán? ________________

b. En el resto de la casa se colocarán baldosas de cerámica.

- ¿Cuántas baldosas de 40 cm × 40 cm se necesitarían para cubrir el área? ____
- ¿Y cuántas de 60 cm × 60 cm? ________
- ¿Se utilizó un número exacto de baldosas? Si no, indica qué fracción de la baldosa se tuvo que cortar para ajustar la medida. ________________



3. Reúnete con un compañero y resuelvan los problemas en el cuaderno.

a. ¿Cuántos vasos de 290 mL se llenan con 10 litros de agua de jamaica?

b. A un niño de 12 kg, el médico le prescribió 15 mg/kg de medicamento cada 8 h. ¿Cuántos gramos de medicina se le administran al día?

c. ¿Cuántas bolsas de 125 g de queso rallado se pueden elaborar con 5 kg?

- **Compartan sus respuestas con sus compañeros y comenten la utilidad del diagrama para realizar las conversiones. Si utilizaron otro método para calcularlas, compártanlo con el grupo.**

Secuencia didáctica 42

Sistema Inglés y Sistema Internacional de Medidas

Aprendizaje esperado: Resolverás problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Lección 1 Pulgadas, pies, yardas y millas

PUNTO DE PARTIDA

1. En parejas, respondan los problemas.

a. Juan hizo un viaje de 100 millas. ¿Recorrió más o menos de 100 kilómetros?

______

b. Un bebé debe tomar de 4 a 5 onzas de agua al día. ¿Debe tomar más o menos de 100 mL? ______

c. A un bebé que pesa entre 6 y 11 libras se le debe administrar 1.25 mL de un medicamento. ¿Cuántos kg debe pesar el bebé para darle esta dosis? ______

______

d. ¿Cuál es el tornillo adecuado para una tuerca de 55 mm: de $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2}$ pulgadas?

______

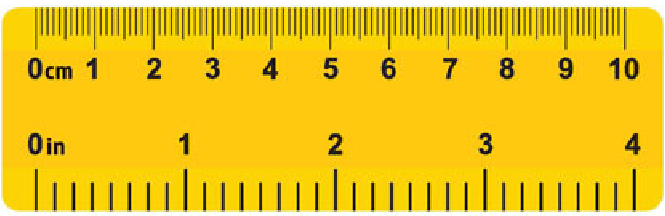
- **Comenten con sus compañeros y con su profesor cómo encontraron las respuestas.**

Conversiones

TRAYECTO FORMATIVO

1. Resuelvan los problemas en equipos.

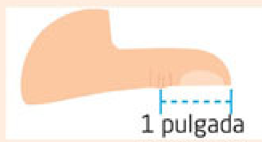
Problema 1. Observen la regla y contesten.



a. ¿Cuántos centímetros caben en 1 pulgada? Expresen el número hasta con una cifra decimal. ______

b. ¿Qué parte de una pulgada es un centímetro? ______

La pulgada (in) es una medida de longitud del Sistema Inglés. Equivale a 2.54 cm y también se denota con dos comillas (") después del número.



c. ¿Cuántos centímetros mide el tornillo de $\frac{1}{4}$"? ______

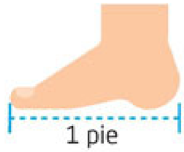
Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Magnitudes y medidas

Problema 2. En una carpintería se ofrecen tablones de madera.

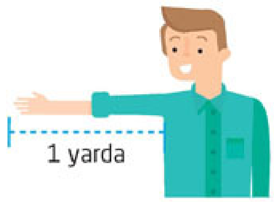
a. ¿Cuáles son las dimensiones de cada tablón en in y en cm? Considera que un pie equivale 12 in. ______________________

____

b. Un **pie** (ft) o (′) es una medida de longitud del Sistema Inglés y equivale a ______________________ cm.



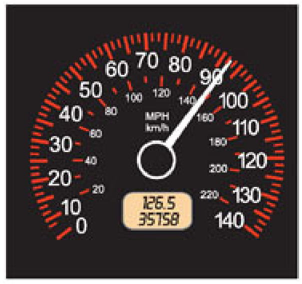
Problema 3. Un campo de futbol americano mide 100 yardas (91 m) de largo y 53 yardas (48 m) de ancho:



a. ¿A cuántos ft equivale una yarda? ______________________

b. La **yarda** (yd) es una medida de longitud del Sistema Inglés y equivale a ____________ ft y a ____________ m.

Problema 4. El velocímetro de un automóvil de EUA indica, con los números grandes, la velocidad en millas por hora (MPH) y con números pequeños, en kilómetros por hora (km/h). En Texas la velocidad máxima permitida es de 85 MPH, que equivale aproximadamente a 137 km/h.



a. ¿A cuántos kilómetros equivale una **milla** (mi)? ______________________

____

- ¿Y a cuántos metros? ______________________

- **Comparen los resultados de cada equipo e investiguen a qué se refieren las imágenes del cuerpo humano que acompañan a las medidas del Sistema Inglés.**

Practicar para avanzar

1. Resuelve los problemas.

a. Felix Baumgartner, un paracaidista austriaco, se tiró desde 96 640 ft de altura y al descender alcanzó una velocidad de 536 MPH, en un salto sin precedentes.

- ¿Desde cuántos metros saltó Felix Baumgartner? ______________________
- ¿Qué velocidad en km/h alcanzó? ______________________

b. Representa en las rectas: un medio, un cuarto, un octavo y un dieciseisavo de pulgada respectivamente. Luego escríbanlas en centímetros.

Comenta tus respuestas en grupo y validen sus resultados con el profesor.

Lección 2

Galones, onzas y libras

1. **En parejas analicen y respondan las actividades.**

   a. Un biberón tiene graduación en onzas y en mililitros. **Una onza equivale aproximadamente a 30 mL** (29.57 mL). Completen la tabla con la cantidad de mililitros de leche que debe tomar un bebé de acuerdo con su edad.

Edad (meses)	Promedio de onzas (oz) por toma	(mL)
1	3	
2	14.5	
3 a 5	6.5	

   b. De acuerdo con un reporte del Foro Económico Mundial, estos son los siete países con mayor consumo de agua al día por persona. Realicen el cálculo en galones. Consideren que **un galón equivale a 3.78 litros** aproximadamente.

País	Litros por persona/día	Galones por persona/día
EUA	575	
Australia	493	
Italia	386	
Japón	374	
México	366	
España	366	
Noruega	301	

   c. Cierto medicamento se administra de acuerdo con la masa del paciente en libras. Una **libra equivale a 453.6 g.** Completen la tabla con la masa en gramos.

Masa (lb)	Masa (g)	Dosis
Menos de 36		No usarlo
36 a 47		5 mL
48 a 95		10 mL

- **Expongan sus resultados al grupo. Comenten con sus compañeros y su profesor el uso de Sistema Inglés en diferentes contextos.**

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. **Reúnete con dos compañeros y resuelvan las actividades.**

   a. Con una cinta métrica, midan su altura y, con una báscula, midan su masa. Completen la tabla en su cuaderno con los datos obtenidos.

Nombre	Altura (m)	Altura (ft)	Masa (kg)	Masa (lb)

b. Calculen de manera individual su índice de masa corporal (IMC). Sigan el procedimiento.

Paso 1. Multiplica tu estatura, en metros, por sí misma. ______

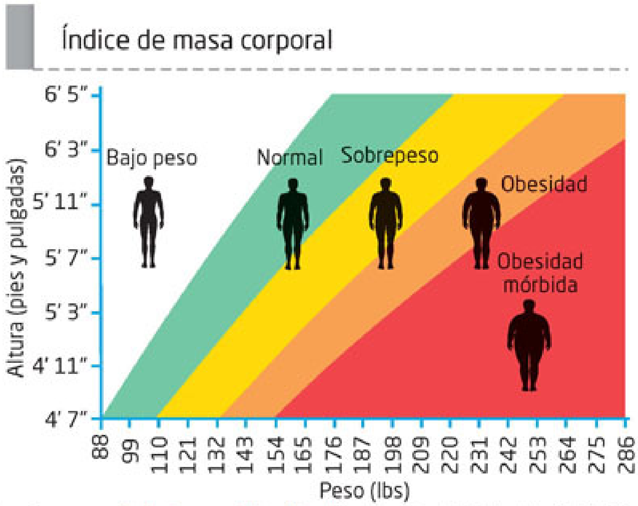
Paso 2. Divide los kilogramos que pesas entre el resultado del paso anterior.______

______

Paso 3. IMC = ______

- Localiza en la gráfica tu información. ¿Cuál es el estado de tu nutrición? ¿En qué categoría te ubicas? ______

______



Fuente: www.diabetes.co.uk/bmi.html (consulta: 13 de junio de 2018).

2. **Completen la tabla de equivalencias.**

Magnitud	Unidad del Sistema Inglés	Unidad del Sistema Internacional
Longitud	Pulgada	
	Pie	
	Yarda	
	Milla	
Masa	Libra	
Capacidad	Onza	
	Galón	

3. **La llave Allen aprieta y afloja tornillos de cabeza hexagonal. Completen la tabla con las medidas de esas llaves en milímetros.**

Pulgadas	mm	Pulgadas	mm	Pulgadas	mm
$\frac{5}{16}$"		$\frac{3}{8}$"		$\frac{7}{16}$"	
$\frac{1}{2}$"		$\frac{9}{16}$"		$\frac{11}{16}$"	
$\frac{5}{8}$"		$\frac{13}{16}$"		$\frac{3}{4}$"	
$\frac{15}{16}$"		$\frac{7}{8}$"		$1\frac{1}{16}$"	

- **Expongan sus resultados al grupo. Comenten con sus compañeros y su profesor el uso de Sistema Inglés en diferentes contextos.**

Gráficas de línea

Aprendizaje esperado: Recolectarás, registrarás y leerás datos en histogramas y polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

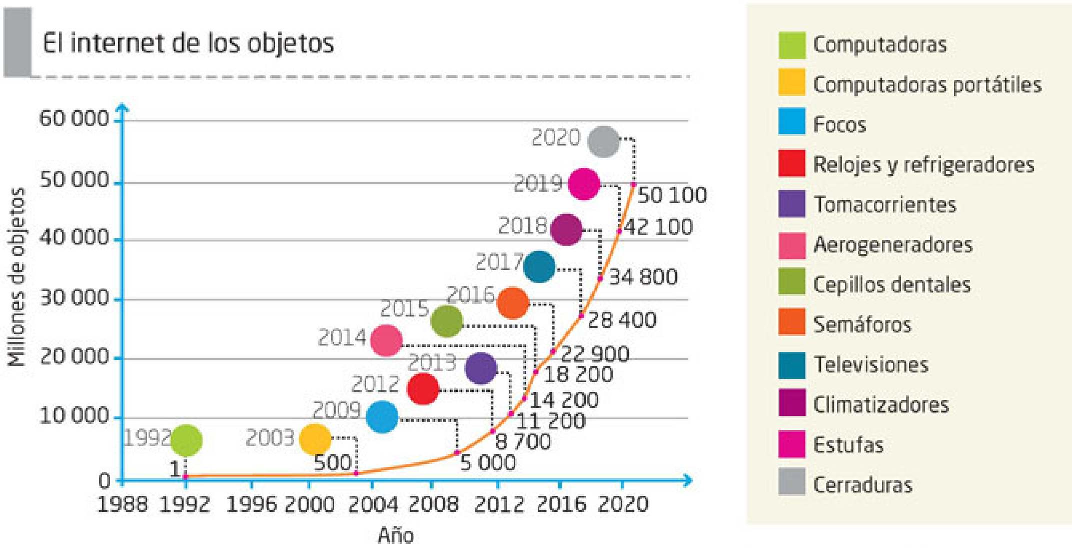
Lección 1 El internet de las cosas

PUNTO DE PARTIDA

1. Analiza la situación con un compañero y respondan las preguntas.

Actualmente hay más dispositivos conectados a internet que seres humanos en el planeta; la conexión inalámbrica es cada vez más rápida, permite el acceso a más personas y la velocidad de banda ancha en hogares, escuelas y empresas va en aumento. Esto hace que internet esté en constante expansión.

a. Analicen la gráfica que muestra la cantidad de dispositivos conectados que utilizan internet. Después contesten.



Fuente: https://www.ncta.com/positions/internet-of-things (consulta: 12 de febrero de 2018).

- ¿En qué año se inició el internet de las cosas? ¿Con qué objeto? ______________________________
- Completen la tabla con la información mostrada en la gráfica anterior.

Intervalo de años	1992 1996	1996 2000	2000 2004	2004 2008	2008 2012	2012 2016	2016 2020
Objetos							
Cantidad							

- ¿En qué periodo se conectaron más objetos a internet? ______________
- ¿Qué piensan que sucederá en veinte años respecto del uso de la tecnología digital? ______________

- **Comenten la utilidad de los datos y comparen resultados con otros equipos.**

Internet en los hogares

1. **Lee la información y realiza lo que se pide.**

TRAYECTO FORMATIVO

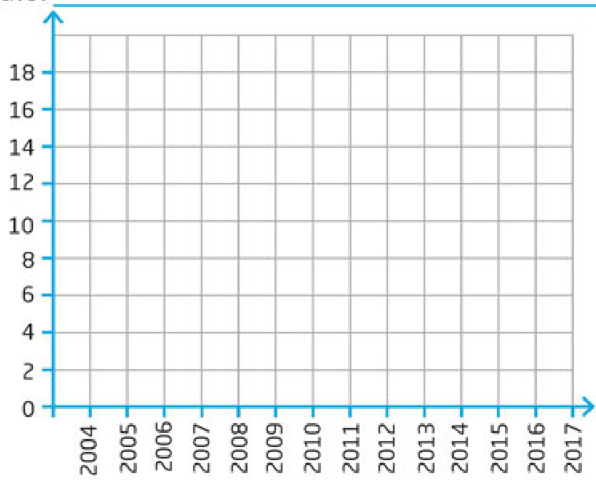
La Encuesta Nacional sobre Disponibilidad y Uso de las Tecnologías de la Información en los Hogares (ENDUTIH) 2016 reporta la cantidad de usuarios que disponen de internet en el país, ya sea a través de una conexión fija o de un teléfono móvil.

Año	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Hogares con internet (millones)	2.3	2.3	2.7	3.2	3.8	5.1	6.3	7.0	7.9	9.8	10.8	12.8	15.7

Fuente: Inegi. Aumentan uso de internet, teléfonos inteligentes y TV digital: Encuesta nacional sobre disponibilidad y uso de tecnologías de la información en los hogares, 2016.

a. Completa la gráfica de línea que muestra la penetración de internet en los hogares mexicanos. Para esto, dibuja un punto en la intersección del año y la cantidad de hogares. Luego une los puntos. Escribe un título que refleje la información de la gráfica. Anota la fuente de donde se tomaron los datos.

Título: ______________________________



Fuente: ______________________________

b. Analiza la información y contesta las preguntas.

- ¿En qué años se dio el mayor aumento de hogares conectados a internet? ____
____
- ¿Qué porcentaje de aumento hubo respecto del año anterior? ______________

c. Explica qué es una gráfica de línea y para qué sirve. ______________
____

- **Comparte tus respuestas con el grupo y, con ayuda del profesor, concluyan para qué sirve una gráfica de línea.**

Lección 2

Proyecto estadístico

1. **En equipos, realicen en el cuaderno las siguientes actividades.**

   a. Elijan un tema para desarrollar una investigación estadística. El tema debe proporcionar información de una variable de estudio a través del tiempo. Por ejemplo: La temperatura máxima y mínima de su localidad o el crecimiento de una planta.

   Si pueden, busquen información en internet sobre algunas series de tiempo para elegir el tema.

   - www.esant.mx/fasema2-009
   - www.esant.mx/fasema2-010
   - www.esant.mx/fasema2-011
   - www.esant.mx/fasema2-012
   - www.esant.mx/fasema2-013
   - www.esant.mx/fasema2-014

En estadística se le llama **serie de tiempo** a un conjunto de valores observados durante una serie de periodos temporales secuencialmente ordenada. Tales periodos pueden ser semanales, mensuales, trimestrales o anuales.

Estos datos se representan mediante gráficas de línea cuyo eje horizontal muestra el tiempo y el eje vertical, los datos de la variable estudiada.

   b. Una vez que decidan el tema, escriban una pregunta que se conteste con la investigación: ______

   c. Respondan las preguntas.
   - ¿Qué datos se necesitan? ______
   - ¿Cómo se obtienen los datos? ______
     A. En internet
     B. Mediante un experimento
     C. Observando directamente
     D. Realizando mediciones
     E. De bases de datos como la del Inegi
   - ¿Qué periodo de tiempo hay que considerar? ______

   d. Organicen los datos en una tabla que contenga tiempo en años, meses, días u horas y los datos de la variable por estudiar.

   e. Analicen de qué tipo de variable se trata: ¿es cuantitativa discreta, es continua?
   - ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo? ______
   - Elijan una escala adecuada que cubra todos los datos. ______

   ______

   f. Construyan la gráfica de línea que representa los datos de la tabla.

   g. Analicen la gráfica y escriban la información que consideren relevante para el estudio. ______

   ______

h. ¿Cuál es su conclusión respecto de los resultados encontrados? ____________

____

____

____

- **Comenten sus respuestas, conclusiones y resultados con el resto del grupo.**

Herramientas académicas

Utiliza una hoja de cálculo electrónica para elaborar la gráfica de línea con los resultados de la investigación.

Para ello ingresa la tabla que elaboraste en el inciso *d* en la hoja electrónica de cálculo.

Selecciona las columnas de tu tabla y en el menú Insertar, da clic en el icono XY (dispersión) como hiciste en la página 70.

En esta ocasión elige la opción Dispersión con líneas rectas y marcadores.

Practicar para avanzar

Reúnete con un compañero y realicen la actividad.

1. En su cuaderno, construyan la gráfica de línea para la precipitación en dos estados: Baja California, donde llovió menos, y Tabasco, donde llovió más en 2017.

Precipitación (mm) Baja California y Tabasco 2017

Mes	ene	feb	mar	abr	may	jun	jul	ago	sept	oct	nov	dic
Baja California	53.6	44.9	1.4	0.0	7.9	0.2	2.9	7.1	9.6	0.0	1.4	2.8
Tabasco	84.3	32.4	61.1	97.6	143.2	285.5	157.5	207.3	377.5	414.0	98.2	55.4

Fuente: http://smn1.conagua.gob.mx/climatologia/TempsyPrecip/Mensuales/2017Prec.pdf (consulta: 12 de febrero de 2018).

a. ¿Qué datos van en el eje *x*? ¿Y en el eje *y*? ____________

b. Definan la escala para representar los mm de lluvia mensual. Para ello consideren el valor mínimo y el máximo. ____________

c. ¿En qué mes la cantidad de lluvia en mm es muy parecida en ambas entidades? ____________

d. ¿En qué mes se ubica la mayor diferencia en la cantidad de lluvia de ambos estados?

____

e. ¿En qué meses la cantidad de lluvia es mayor a 100 mm en Tabasco? ____________

Lección 3 ¿Qué información se obtiene de las gráficas?

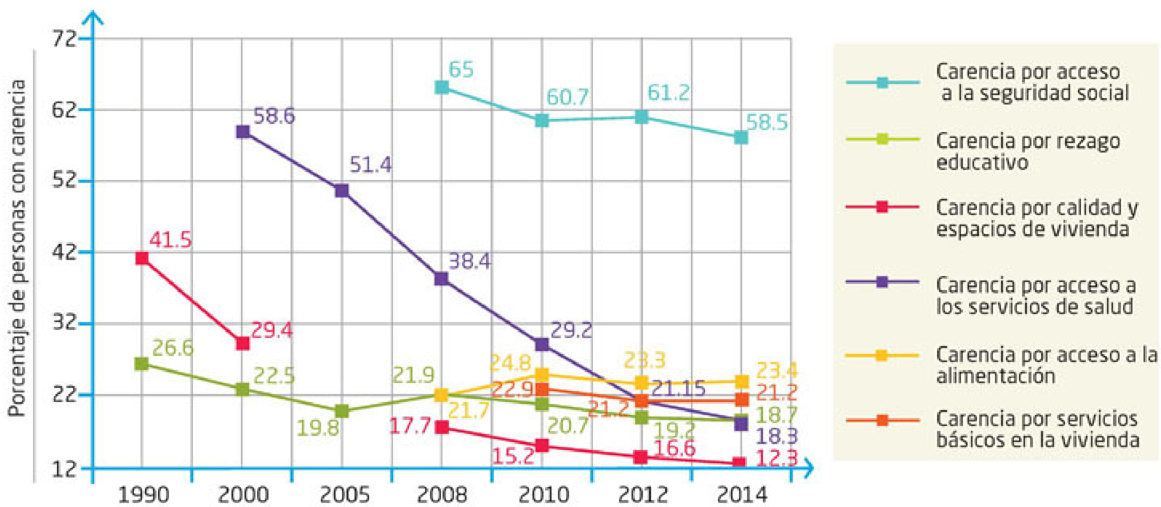
1. **Lee la información y analiza la gráfica.**

Para medir el nivel de pobreza en la población, el Inegi tomó en cuenta los siguientes indicadores.

- Rezago educativo
- Acceso a los servicios de salud
- Calidad y espacios en la vivienda
- Acceso a la seguridad social
- Acceso a la alimentación
- Acceso a los servicios básicos en la vivienda

De los Censos de Población y Vivienda de 1990, 2000 y 2010, así como del Módulo de Condiciones Socioeconómicas 2008, 2010, 2012 y 2014 se obtuvieron los datos mostrados en la gráfica.

Evolución de la población en pobreza en materia de carencias sociales, 1990-2014



Fuente: Los datos anteriores a 2008 son de los Censos de Población y Vivienda 1990 y 2000 y del Conteo de Población 2005; los datos de 2008 en adelante son del Módulo de Condiciones Socioeconómicas. https://www.coneval.org.mx/Medicion/EDP/Paginas/Evolucion-de-las-dimensiones-de-la-pobreza-1990-2014-.aspx (consulta: 12 de febrero de 2018).

a. Reúnete con un compañero e identifiquen con una ✔ la información que se obtiene de la gráfica de línea.

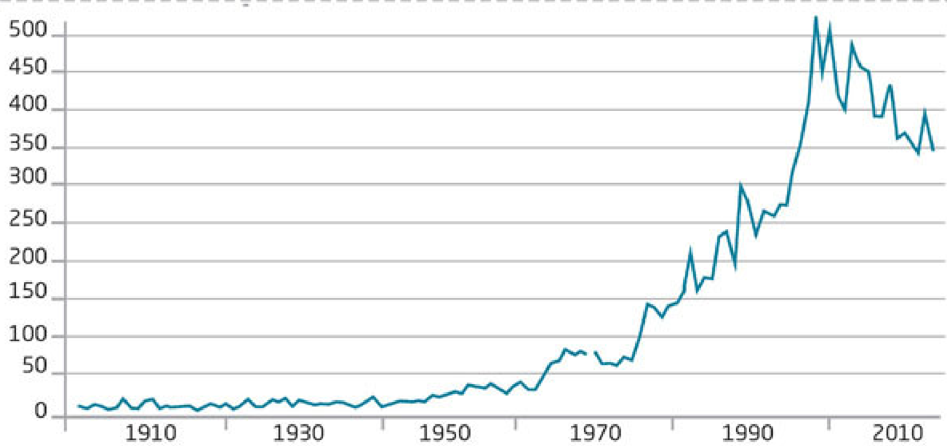
- La menor diferencia se muestra en el indicador Carencia por calidad y espacios en la vivienda, entre 2008 y 2014. ( )
- El indicador Carencia por acceso a servicios de salud es el que más ha disminuido en entre el 2000 y el 2014. ( )
- La menor diferencia se encuentra en el indicador Carencia por servicios básicos en la vivienda entre 2010 y 2014. ( )
- En general la tendencia de los diferentes indicadores es a la baja. ( )
- Alguno de los indicadores en un futuro puede subir rápidamente. ( )

Aplica lo que aprendiste.

1. Analiza la gráfica y describe en tu cuaderno la información que se presenta.

PUNTO DE LLEGADA

Todos los desastres naturales registrados en el mundo por año



Fuente: Base de datos Internacional sobre Desastres(EM-DAT) (i) por medio de la publicación "Out World in Dat" https://www.bancomundial.org/es/news/feature/2017/12/15/year-in-review-2017-in-12-charts (consulta: 12 de febrero de 2018).

2. Revisa las actividades que resolviste en la secuencia y contesta.

a. ¿Qué tipo de gráfica es? ______________________

____

b. ¿Para qué se usó? ______________________

____

____

c. ¿Qué datos se representan en el eje *x*? ______________________

- ¿Y en el eje *y*? ______________________

d. ¿Qué información puedes obtener de la gráfica de línea? ______________________

____

3. Presentación de los resultados del proyecto estadístico.

a. Realicen una presentación, puede ser en cartulina o en computadora, si cuentas con una. Por ejemplo, puedes usar el programa PowerPoint (PP).

b. Organicen la presentación en los siguientes puntos.

- Tema de estudio
- Fuente de información
- Tipo de datos
- Tablas con datos
- Gráfica(s)
- Conclusiones. Descripción de la información que muestra la gráfica

- **Comenten en grupo en qué se diferencian las gráficas de línea de las gráficas poligonales. Escriban un ejemplo en el que puedan usar cada una de ellas.**

Secuencia didáctica

44

Desviación media

Aprendizaje esperado: Usarás e interpretarás las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decidirás cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Lección 1

Desviación media en datos no agrupados

PUNTO DE PARTIDA

1. **Realicen la actividad en equipos de cinco integrantes.**

   a. En el patio de la escuela, cada integrante realice 2 saltos de longitud. Midan cada salto con una cinta métrica y anoten los resultados en la tabla.

Integrante	Longitud del salto (cm)	
	Salto 1	Salto 2

Glosario

media. Es el cociente de la suma de los datos entre la cantidad de datos.

mediana. Es el elemento que se localiza a la mitad de los datos ordenados.

moda. Es el dato con mayor frecuencia.

   b. Escriban de menor a mayor las medidas de los saltos de los integrantes del equipo. ______

   c. Calculen la **media**, la **mediana** y la **moda** de los datos. ______

   d. ¿Consideran que la media representa la longitud de los saltos de los integrantes del equipo? ¿Por qué? ______

¿Qué tan dispersos están los datos?

TRAYECTO FORMATIVO

1. **Lean la información y hagan lo que se pide.**

   Una forma de saber si la media representa mejor un conjunto de datos es calculando la dispersión. Para ello hay que obtener la distancia entre cada uno de los datos del conjunto y la media.

   a. Calculen el rango de los datos en la tabla. ______

   b. Completen la tabla. Para calcular la distancia a la media, obtengan el valor absoluto de la diferencia entre cada dato y la media ($\bar{s}$).

Longitud del salto (s)										
Distancia a la media ($\lvert s-\bar{s}\rvert$)										

Eje: Análisis de datos
Tema: Estadística

c. Calculen el promedio de las diferencias a la media. ___________________

- **Comparen con otros equipos el valor que obtuvieron en el inciso *c*. Analicen en cuáles equipos se obtuvieron el mayor y el menor promedio de diferencias. Luego analicen qué relación hay entre las longitudes de los saltos que obtuvieron esos equipos y su respectivo promedio de diferencias.**

Se llama **desviación media (DM)** al promedio de las distancias entre los datos y la media aritmética y se calcula sumando las distancias de los datos al promedio dividido entre el total de datos.

Cuando la DM es grande, los datos están dispersos respecto a la media y cuando la DM es pequeña, los datos están cerca de la media. En este último caso, la media es un buen representante de los datos.

Practicar para avanzar

1. En una fábrica se elaboran tornillos de una aleación especial de acero. Para asegurar la calidad, se toman al azar muestras de 4 tornillos y se calcula la desviación media del diámetro de estos. La tabla muestra los datos obtenidos en cuatro muestras.

 a. Completa la tabla, calcula el rango y la media para cada número de muestra.

Número de muestra	Diámetro del tornillo (pulgadas)				Rango	Media
	1	2	3	4		
1	0.5014	0.5022	0.5009	0.5027		
2	0.5021	0.5041	0.5024	0.5020		
3	0.5018	0.5026	0.5035	0.5023		
4	0.5008	0.5034	0.5024	0.5015		

 b. Calcula, para cada elemento de las muestras, la distancia a la media correspondiente y la desviación media en cada caso. Luego responde.

Número de muestra	Distancia a la media del tornillo				Desviación media
	1	2	3	4	
1					
2					
3					
4					

- ¿En qué muestra los datos están más dispersos? ___________________
- Si fueras el responsable del control de calidad, ¿qué harías con la producción en los casos en que la desviación media es alta? ___________________

Lección 2 Desviación media en datos agrupados

1. Resuelve el siguiente problema.

Los datos de la tabla corresponden a los miles de kilómetros recorridos por un modelo de neumático hasta que se poncha o se revienta.

37.654	61.979	52.452	52.277	51.179	29.480	89.116	61.752
55.643	66.519	56.155	40.709	46.502	41.463	30.252	76.580
58.708	49.011	41.539	35.342	80.502	51.269	44.719	34.182
66.519	60.277	43.068	40.709	34.182	73.808	82.919	85.720
35.342	37.402	62.215	59.449	55.989	53.324	48.035	67.124
67.124	41.830	61.030	58.267	10.504	50.432	37.748	51.831
73.808	61.065	35.807	65.585	69.483	64.398	28.625	33.412
38.420	53.751	90.565	74.239	55.912	47.012	44.411	67.632
70.003	34.754	36.949	46.681	85.720	49.677	59.168	35.884
67.467	45.313	46.724	78.635	50.238	65.996	48.698	75.850

a. ¿Qué procedimiento debes seguir para calcular la desviación media de los datos de la tabla? ______________________________

____

b. ¿Qué dificultad presenta el procedimiento? ______________________________

c. ¿Sería más fácil trabajar con intervalos de datos? ¿Por qué? ______________________________

____

____

d. Completa la tabla. Aplica lo que aprendiste en la secuencia 31 para agrupar los datos en intervalos y para obtener las marcas de clase.

Intervalo	Conteo	Frecuencia absoluta (f)	Marca de clase (x)	Producto ($f \times x$)
Total		$n =$		

e. Calcula la media de los datos ($\bar{x}$) a partir de la tabla. Para esto, divide la suma de los productos ($f \times x$) entre el número total de datos (n).

f. Calcula la desviación media (DM) de los kilómetros recorridos por los neumáticos. Para ello completa la siguiente tabla.

Intervalo	Marca de clase (x)	Frecuencia absoluta (f)	Distancia a la media $\lvert x-\bar{x}\rvert$	Producto $f\times\lvert x-\bar{x}\rvert$
Total				

g. Calcula la desviación media (DM). Para esto, divide la suma de los productos ($f\times\lvert x-\bar{x}\rvert$) entre el número total de datos (n). Luego responde.

- ¿Cuál es la desviación media que obtuviste? ______________________
- ¿Qué tan dispersos están los datos? ______________________
- ¿La media de los kilómetros recorridos por los neumáticos sirve para representar los datos adecuadamente? ¿Por qué? ______________________

Practicar para avanzar

1. A continuación se muestran las temperaturas y la velocidad del viento que se pronosticaron para cada hora del miércoles 14 de febrero de 2018 en Chihuahua, Chihuahua.

00:00	01:00	02:00	03:00	04:00	05:00	06:00	07:00	08:00	09:00	10:00	11:00
12 °C	11 °C	10 °C	10 °C	9 °C	8 °C	8 °C	8 °C	11 °C	15 °C	20 °C	23 °C
11 km/h	11 km/h	10 km/h	10 km/h	9 km/h	9 km/h	8 km/h	8 km/h	9 km/h	11 km/h	13 km/h	15 km/h

12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00	23:00
25 °C	27 °C	28 °C	29 °C	28 °C	26 °C	24 °C	22 °C	20 °C	19 °C	17 °C	17 °C
18 km/h	22 km/h	24 km/h	24 km/h	24 km/h	23 km/h	21 km/h	19 km/h	18 km/h	17 km/h	14 km/h	13 km/h

a. En tu cuaderno, organiza los datos en una tabla.
b. Calcula la media y la desviación media de la temperatura y de la velocidad del viento.

Escribe tus conclusiones respecto de la dispersión de los datos alrededor de la media de la temperatura y de la velocidad del viento.

Contenido: Utilizas la desviación media de un conjunto de datos para su análisis.

¿Qué tan dispersos?

1. Lee el problema y resuelve.

La tabla muestra la temperatura mensual promedio (°C) en un año en cuatro ciudades:

Ciudad	Temperaturas mensuales promedio (°C)											
A	12	9	7	6	10	12	11	11	4	4	3	3
B	16	17	18	19	14	9	7	2	−1	−3	−2	5
C	−5	−3	0	−1	4	21	19	16	17	12	11	0
D	0	−1	−3	3	5	6	11	10	13	16	17	20

a. Elige la escala para cada eje, luego grafica las temperaturas mensuales promedio de cada ciudad.

b. Calcula la temperatura promedio anual (TPA) de cada ciudad.

______ TPA_A ______ TPA_B ______ TPA_C ______ TPA_D

c. Completa la tabla. Calcula la distancia de la temperatura mensual promedio de cada ciudad a su temperatura promedio anual.

Ciudad	Temperaturas mensuales promedio (°C)											
A	12	9	7	6	10	12	11	11	4	4	3	3
Distancia a TPA_A												
B	16	17	18	19	14	9	7	2	–1	–3	–2	5
Distancia a TPA_B												
C	−5	−3	0	−1	4	21	19	16	17	12	11	0
Distancia a TPA_C												
D	0	–1	–3	3	5	6	11	10	13	16	17	20
Distancia a TPA_D												

d. Calcula la desviación media (DM) de las temperaturas de cada ciudad.

DM_A: ____________ DM_B: ____________ DM_C: ____________ DM_D: ____________

e. ¿En que ciudades la temperatura promedio anual es una buena representación de las temperaturas mensuales promedio? Explica tu respuesta. ____________

____

____

Aplica lo que aprendiste.

PUNTO DE LLEGADA

1. La tabla muestra las calificaciones que han tenido 100 estudiantes de segundo grado de secundaria.

Calificación	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
De 0 a 2	1	7	22	21
De 2 a 4	5	14	19	20
De 4 a 6	24	50	10	20
De 6 a 8	40	20	21	20
De 8 a 10	30	9	28	19
Total:				

a. Elabora un histograma con las calificaciones de cada grupo.

b. Calcula la calificación promedio, la desviación media y el rango de cada grupo.

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Calificación promedio				
Desviación media				
Rango				

c. ¿En cuál grupo el promedio representa mejor las calificaciones? Explica tu respuesta. ____________

____

- **Comenta con tus compañeros qué aprendiste sobre la desviación media en un conjunto de datos agrupados y no agrupados.**

Resuelvo con tecnología

Desviación media

Reúnete con un compañero, lean la situación y en una hoja electrónica de cálculo realicen lo que se pide para analizar los datos. Luego respondan las preguntas.

En una secundaria hay cuatro grupos de tercero y solamente uno puede participar en el torneo interescolar. Cada grupo forma un equipo de futbol con 11 jugadores. Durante sus entrenamientos, cada equipo practica tiros penales. Un profesor de Educación Física anota los resultados para analizarlos y elegir al mejor equipo. La tabla muestra la información recabada en un entrenamiento.

Número del jugador	Goles anotados			
	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
1	1	2	2	1
2	2	1	3	2
3	1	2	3	1
4	3	2	1	3
5	5	1	3	3
6	2	7	2	1
7	5	2	3	1
8	4	2	3	1
9	2	3	4	8
10	3	7	2	8
11	2	1	4	1

	A	B
1	Número de jugador	Equipo 1
2	1	1
3	2	2
4	3	1
5	4	3
6	5	5
7	6	2
8	7	5
9	8	4
10	9	2
11	10	3
12	11	2
13	Promedio	=Promedio(B2:B12)

Imagen 1

1. Copien la información del equipo 1 como se muestra en la imagen 1. En la celda B13 calculen el promedio de goles anotados con la fórmula "=Promedio(B2:B12)".

2. En diferentes hojas de cálculo, copien la información de los otros equipos, calculen el promedio de goles anotados por cada equipo y contesten.

   a. ¿Cuál equipo tiene mejor promedio de goleo? ______________________

   b. ¿Qué equipo debe ir al torneo interescolar? ¿Por qué? ______________________

Para verificar que la decisión tomada es la correcta, calculen la desviación media del número de goles anotados por cada equipo. Recuerden que deben obtener el promedio de las distancias a la media, como aprendieron en la secuencia anterior.

3. Para calcular la **distancia a la media**, primero calculen la diferencia entre los datos y la media. Ingresen en la celda C2 la fórmula "=B2−$B$13".

Recuerden que el símbolo $ fija la celda en la fórmula para que no se modifique al copiarla en otras filas.

	A	B	C
1	Número de jugador	Equipo 1	Diferencia con la media
2	1	1	=B2-$B$13
3	2	2	
4	3	1	
5	4	3	
6	5	5	
7	6	2	
8	7	5	
9	8	4	
10	9	2	
11	10	3	
12	11	2	
13	Promedio	2.727272727	

Imagen 2

B	C	D
Equipo 1	Diferencia con la media	Distancia a la media
1	-1.727272727	=ABS(C2)
2		
1		
3		
5		
2		
5		
4		
2		
3		
2		
2.727272727		

Imagen 3

4. Para obtener la distancia a la media, calculen el valor absoluto de la diferencia ingresando en la celda D2 la fórmula "=ABS(C2)". La función ABS permite obtener el valor absoluto de un número.

5. Copien ambas fórmulas en los demás renglones para calcular las distancias a la media de cada dato.

6. Una vez que hayan obtenido todas las distancias, calculen el promedio de estas con la función PROMEDIO, como hicieron en el paso 1.

7. Repitan el procedimiento con los datos de los demás equipos y respondan.

   a. ¿Qué equipo tiene menor desviación media? ______

   b. ¿Cuál es el rango de goles del equipo con menor desviación media? ______

   c. ¿Qué equipo tiene mayor desviación media? ______

   d. ¿Cuál es el rango de goles del equipo con mayor desviación media? ______

   e. Con base en la información obtenida, ¿a qué equipo elegirían para el torneo interescolar?

   ______

8. Confirmen que la desviación media que obtuvieron de cada equipo es correcta. Para esto utilicen la función DESVPROM. Ingresen en la celda D14 la fórmula "=DESVPROM(B2:B12)" para obtener la desviación media del conjunto de datos.

   a. ¿Cuánto vale la desviación media de una lista de datos iguales? ______

Compartan sus conclusiones con sus compañeros. Retomen los problemas de la secuencia anterior y calculen la desviación media de los conjuntos de datos.

Punto de encuentro

Lee con atención y haz lo que se solicita.

Sobrepeso y obesidad

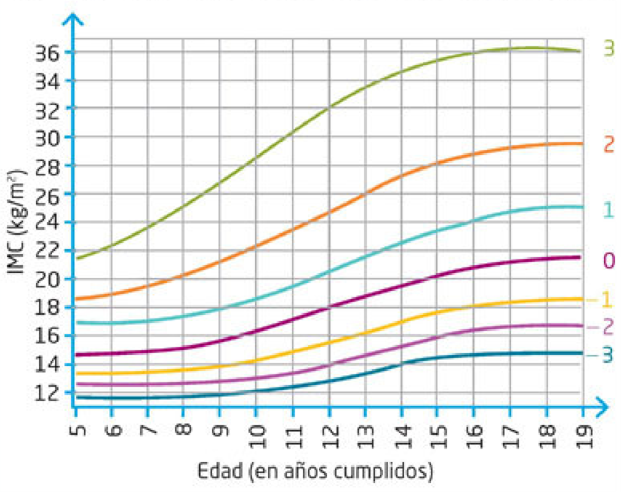
En años recientes se han agudizado los problemas de sobrepeso y obesidad infantil en todo el mundo. El origen de estos padecimientos se asocia con varios factores, pero se ha comprobado que el estilo de vida y la mala nutrición son los principales, ya que actualmente los niños y adolescentes practican menos deporte y su dieta contiene demasiada azúcar y exceso de calorías.

En México se está impulsando el desarrollo de competencias para una vida saludable con el fin de promover una **cultura de la salud** y de esa manera prevenir, revertir y disminuir el avance de este problema en los alumnos de educación básica.

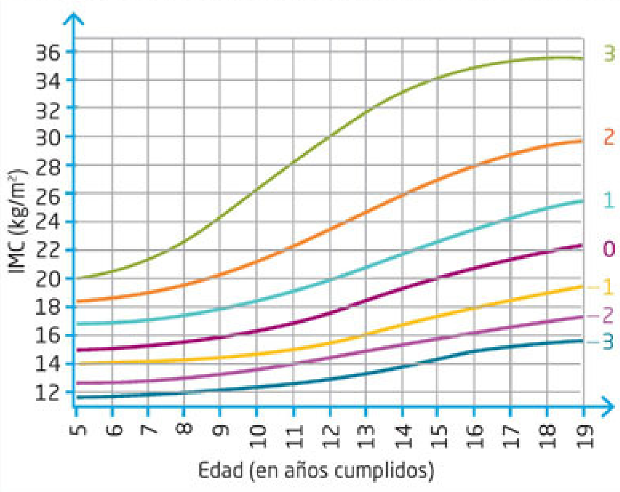
1. **Lee la información con tres compañeros y hagan un estudio estadístico sobre el índice de masa corporal (IMC) de su grupo.**

   Tomen en cuenta los estándares de sobrepeso y obesidad de niños y jóvenes dados por la Organización Mundial de la Salud (OMS) y que se muestran en las siguientes gráficas.

IMC para niñas



IMC para niños



Fuente: www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5417151&fecha=25/11/2015 (consulta: 1 de junio de 2018).

a. Calculen el IMC de cada integrante del equipo. Usen la siguiente fórmula.

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso (kg)}}{\text{Altura}^2\,(\text{m})^2}$$

- Consigan una báscula y una cinta métrica y registren el IMC de cada integrante del equipo.
- Ubiquen su IMC en la gráfica correspondiente.

Compartan sus resultados con otros equipos.

2. Sigan los pasos y hagan su proyecto de investigación.

a. Organícense para recolectar los datos de todo el grupo y regístrenlos en una tabla como la que se muestra.

Nombre	Peso (kg)	Estatura (m)	Género (M/F)

- ¿Alguno de los datos que se registran en la tabla es importante para analizar la calidad de vida de sus compañeros de grupo? Expliquen por qué. ______________________________

b. Indaguen, mediante una pequeña encuesta, si practican algún deporte.
c. Elaboren una tabla con los datos obtenidos.
d. Elijan los datos que serán útiles para calcular el IMC y estructuren su tabla con los datos necesarios para el objetivo que se busca.
e. Elaboren en su cuaderno las tablas para cada uno de los datos con frecuencias absolutas y frecuencias relativas.
f. Discutan para qué datos van a calcular las medidas de tendencia central y la desviación media.
g. Elaboren las gráficas para presentar los resultados al grupo.
h. Realicen una presentación con las gráficas, los resultados del estudio y su comparación con los estándares de la OMS.

- ¿Cuál es el IMC promedio de su grupo?
- Escriban una conclusión basada en el análisis de los datos de la encuesta y en la medición. ______________________________

Comenten en grupo sus conclusiones y planteen un plan de acción personal para prevenir la obesidad y mantenerse sanos.

Reviso mi trayecto

Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Con base en tus resultados, retoma los contenidos que se te dificultaron.

1. **Los alumnos de una secundaria realizan una investigación sobre el parque el Gran Cañón localizado en EUA, en el estado de Arizona. Sin embargo, los datos que encontraron están en millas y pies. Realiza las conversiones correspondientes.**

Sendero	Congruentes		Cambio de elevación	
	Millas	Kilómetros	Pies	Metros
Widforss Trail	9.6		200	
Bright Angel Trail	9.2		3 060	

2. **Obtén las equivalencias entre las unidades.**

   a. 15 hL son ______ L.
   b. 52 mm son ______ m.
   c. 5.5 kg son ______ g.
   d. 4 300 km son ______ dam.
   e. 10.7 mg son ______ g.
   f. 89 L son ______ daL.

3. **La tabla muestra el número de casos de influenza que se registraron en un país, clasificados por edad y tipo de influenza. Para cada tipo, calcula la media, la mediana y la desviación media de los datos.**

Edad	Tipo de influenza			
	A H3	A H1N1	A	B
Menos de 1 año	1	10	2	1
De 1 a 9 años	102	364	55	201
De 10 a 19 años	98	134	12	120
De 20 a 29 años	104	206	23	44
De 30 a 39 años	101	282	28	83
De 40 a 49 años	99	318	35	118
De 50 a 59 años	83	295	38	96
Más de 60 años	113	323	61	183
Media				
Mediana				
Desviación media				

   a. Si tuvieras que graficar la información obtenida, ¿qué tipo de gráfica usarías? ¿Por qué? ______

Valoro mis fortalezas

Revisa las respuestas con ayuda del profesor. Con base en tus resultados, retoma los contenidos que se te dificultaron.

1. **Completa la tabla.**

Sistema de ecuaciones	$3x + 2y = 8$ $-3x + 6y = 0$	$x = -2y+5$ $x = y - 4$	$y = 3x - 2$ $3y + 3 = 6x$
Método de solución			
Solución del sistema			

a. Explica qué criterio tomaste en cuenta al seleccionar el método de solución para cada sistema de ecuaciones. ______________________________

2. **Lee cada situación y responde.**

Situación 1. En una empacadora, cada empleado empaca una caja y media de productos al día.

Situación 2. Una clase de natación cuesta \$150 por un día a la semana. Por cada día extra a la semana, se tendrá un descuento de \$10 por clase.

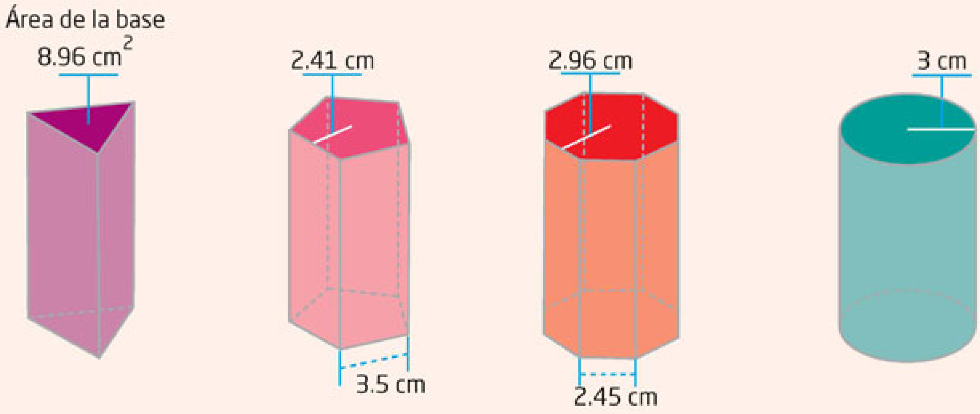
a. Para la situación 1, ¿cuántas cajas empacarán tres empleados? ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ______________________________

b. Para la situación 2, ¿cuánto cuesta la clase si se asisten 4 días a la semana? ¿Qué expresión algebráica representa la situación? ______________________________

c. ¿Qué tipo de variación describen las situaciones? Justifica tu respuesta. ______________________________

d. Dibuja la gráfica que describe cada situación.

3. **Los siguientes cuerpos geométricos tienen 10 cm de altura. De acuerdo con los datos proporcionados, calcula el volumen de cada uno.**



4. **Analiza los datos y ordena de menor a mayor a las personas:**

Andrés Mide 1.78 metros y pesa 176 libras	Jaime Mide 68 pulgadas y pesa 85 kg
Alfonso Mide 180 cm y pesa 77 000 g	Pablo Mide 1 650 mm y pesa 150.57 lb

a. Según su estatura. ___

b. Según su peso. ___

5. **En un maratón se registró la velocidad de los seis primeros lugares.**

Competidor	Velocidad (km/h)
Rodrigo	10.5
Diego	10.75
Paula	14.2
Lorenzo	10
Samuel	9.65
Jorge	13

a. Calcula el rango y la desviación media de los datos. ___

b. ¿La media es un dato representativo? ¿Por qué? ___

6. **La tabla muestra las calificaciones promedio mensuales de dos grupos de segundo de secundaria.**

Grupo / mes	sep	oct	nov	dic	ene	feb	mar	abr	may	jun
Segundo A	8.3	6.7	7.2	8	8.2	8.3	8.3	8.5	8.4	8.8
Segundo B	9.1	8.4	7	7.5	7.6	7.7	8.3	8	8.2	8.4

a. Construye la gráfica de línea y luego responde.

b. ¿En qué mes se tiene mayor diferencia de promedio en ambos grupos? ______

______

c. ¿En qué mes el promedio es parecido en ambos grupos? ______

______

d. ¿En qué meses la calificación promedio es mayor que 8 en el grupo B? ______

______

______

7. **Luis resolverá el siguiente sistema de ecuaciones.**

$$3y = 5 - x;\ 2x + 6y = 10$$

a. Explica qué método es adecuado para resolver el sistema. ______

______

______

______

b. Resuelve el sistema y escribe tus operaciones en el recuadro.

Fuentes
de información

Para el alumno

Impresas

- Bosh, C. y Gómez C. *Una ventana a las formas*, Santillana, México, 2003 (Biblioteca Juvenil Ilustrada).
- Bosch, Carlos. *El billar no es de vagos. Ciencia, juegos y diversión*, Fondo de Cultura Económica, México, 2009 (colección Ciencia para Todos).
- Callejo, María Luz. *Un club matemático para la diversidad*, Narcea, Madrid, 1998.
- Capó, Miquel. *El país de las mates. 100 problemas de ingenio 4*, Rompecabezas, Madrid, 2006.
- Enzensberger, Hans M. *El diablo de los números*, Siruela, Madrid, 2013.
- Fabretti, Carlos. *Malditas matemáticas. Alicia en el país de los números*, Alfaguara, Madrid, 2000.
- Moreno, C. R. *Una historia de las matemáticas para jóvenes*, Nivola, Madrid, 2008.
- Peña, José Antonio de la. *Álgebra en todas partes*, Fondo de Cultura Económica, México, 2009 (colección Ciencia para Todos).
- Perelma, Yakob. *Matemáticas recreativas*, Rodesa, Barcelona, 2007.
- Perrero, Mariano. *Historia e historias de matemáticas*, Iberoamérica, México, 1994.
- Prieto, Carlos. *Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México, 2009 (colección Ciencia para Todos).
- Ricorri, Stella. *Juegos y problemas para construir ideas matemáticas*, Novedades Educativas, México, 2009.
- Sierra i Fabra, Jordi. *El asesinato del profesor de matemáticas*, Anaya, Madrid, 2000.
- Snape, C. Sal si puedes. *Laberintos y rompecabezas matemáticos*, Noriega-Limusa, México 2005.

Electrónicas

- 100 problemas matemáticos que retan al alumno a pensar.
  http://www.lavirtu.com/eniusimg/enius4/2002/01/adjuntos_fichero_3543.pdf
  (consulta: 18 de junio de 2018)

- Archivo PDF de la obra de Adrián Paenza, *Matemática… ¿Estás ahí?* Episodio 3. Siglo XXI, Argentina, 2008.
  http://mate.dm.uba.ar/~cepaenza/libro/matemati4.pdf
  (consulta: 19 de junio de 2018)

- Ejercicios, problemas e interactivos de aritmética, álgebra y geometría.
  http://newton.matem.unam.mx/
  (consulta: 18 de junio de 2018)

- En esta dirección electrónica encontrarás videos, documentos y actividades de la SEP sobre temas relacionados con el programa de primero de secundaria.
  https://www.aprende.edu.mx/recursos-educativos-digitales/recursos/index.html?q%5B%5D=Matem%C3%A1ticas
  (consulta: 18 de junio de 2018)

- Interactivos que te permiten abordar diversos temas propuestos para la secundaria.
  http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/Secundaria.html
  (consulta: 18 de junio de 2018)

- Página de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas con los diferentes exámenes y soluciones para que el alumno consulte y desarrolle la demostración matemática.
  http://www.ommenlinea.org/actividades/concursos/canguro-matematico/
  (consulta: 19 de junio de 2018)

- Página en la que podrás consultar el libro *Números increíbles* del autor Ian Stewart.
  http://www.librosmaravillosos.com/numerosincreibles/index.html
  (consulta: 19 de junio de 2018)

- Software de geometría dinámica gratuito que te permite hacer construcciones útiles para geometría, álgebra, cálculo, entre otros.
  www.geogebra.org
  (consulta: 19 de junio de 2018)

- Tutoriales y ejercicios de diversos temas propuestos para secundaria.
  https://es.khanacademy.org/math/eb-2-secundaria
  (consulta: 18 de junio de 2018)

Para la elaboración de este libro

Impresas

- Alsina, C. y otros. *Invitación a la didáctica de la geometría*, Síntesis, Madrid, 1987 (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Alsina, C. y otros. *Materiales para construir la geometría*, Síntesis, Madrid, 1987 (colección Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Batanero, C. y otros. *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*, SEP, México, 2011.
- Batanero, C. y Godino, J. *Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*, en International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, vol. 25, num 4. 1994.
- Chamorro, M. del C., y otros. *Didáctica de las matemáticas*, Pearson, Madrid, 2003.
- Segal, S., Giuliani, D. *Modelización matemática en el aula: posibilidades y necesidades*, Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2008.
- Ursini, Sonia y otros. *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, Trillas, México, 2005.

Electrónicas

- Aprendizaje significativo en el área de matemáticas: una experiencia pedagógica.
  www.funes.uniandes.edu.co/2385/
  (consulta: 22 de junio de 2018)
- Batanero, C. y J. Godino. Estocástica y su didáctica para maestros.
  http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf
  (consulta: 18 de junio de 2018)
- Propuestas didácticas que se pueden llevar a cabo en clase.
  https://aprendiendomatematicas.com/actividades-matematicas-secundaria/
  (consulta: 20 de junio de 2018)
- Textos para la formación matemática y didáctica de maestros.
  www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm
  (consulta: 22 de junio de 2018)

MATEMÁTICAS 2

En **Matemáticas 2** de la serie **Fortaleza Académica** aprenderás que las técnicas y los conceptos matemáticos permiten resolver problemas cotidianos y en diversos campos del conocimiento, lo que te llevará a reconocer que su aplicación no se limita al trabajo en el salón de clases.

También encontrarás diversas oportunidades para trabajar colaborativamente. Junto con tus compañeros analizarás problemas, plantearás estrategias de solución y construirás acuerdos. Todo lo anterior fortalecerá tus conocimientos y desarrollará tus habilidades comunicativas y sociales.

SANTILLANA
Secundaria

santillanacontigo.com.mx

FORTALEZA
ACADÉMICA